第二十一讲

§ 不动点 (fixed point) 及其近邻

前面我们定义了重正化变换 $\vec{\mu}' = R_b \vec{\mu}$

若 $\boxed{R_b \vec{\mu}^* = \vec{\mu}^*}$， 则 $\vec{\mu}^*$ 称为 fixed point，不动点

- $\vec{\mu}^*$ 的临界面：(critical surface)

  在一个"子空间中，所有点 $\vec{\mu}$：$\boxed{\lim_{b\to\infty} R_b \vec{\mu} = \vec{\mu}^*}$

- 设 $\vec{\mu}$ 在 $\vec{\mu}^*$ 附近

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}^* + \delta\vec{\mu}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mu}' &= R_b \vec{\mu} = R_b \vec{\mu}^* + R_b \delta\vec{\mu} \\ \vec{\mu}' &= \vec{\mu}^* + \delta\vec{\mu}' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta\vec{\mu}' = R_b^L \delta\mu + O((\delta\mu)^2)$$

其中：$(R_b^L)_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial \mu'_\alpha}{\partial \mu_\beta}\right)_{\vec{\mu}=\vec{\mu}^*}$ 是线性算符

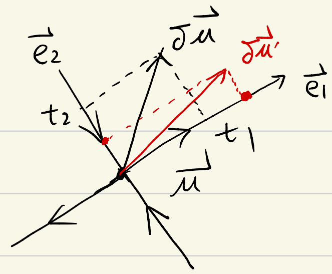
有：$\boxed{\delta\mu'_\alpha = \sum_\beta \left(\frac{\partial \mu'_\alpha}{\partial \mu_\beta}\right)_{\vec{\mu}=\vec{\mu}^*} \delta\mu_\beta}$

- 求解 R_b^L 的本征方程：

$$R_b^L \vec{e}_j = \rho_j(b)\, \vec{e}_j$$

由于 $R_{b'} R_b \vec{e}_j = R_{b'b} \vec{e}_j$

$\therefore \rho_j(b)\rho_j(b') = \rho_j(bb') \Rightarrow$ 本征值必须：$\rho_j(b) = b^{y_j}$，y_j 与 b 无关



• 展开 $\quad \delta\vec{\mu} = \sum_j t_j \vec{e_j}$

$$\delta\vec{\mu}' = R_b^L \delta\mu$$

$$= R_b^L(t_1\vec{e_1} + t_2\vec{e_2} + \cdots) = \rho_1(b)t_1\vec{e_1} + \rho_2(b)t_2\vec{e_2} + \cdots$$

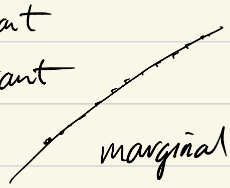
$$= \sum_j t_j'\vec{e_j}$$

其中 $t_j' = b^{y_j} t_j$

• 当 $y_j>0$，t_j' 随 b 增大而增大，relevat

• 当 $y_j<0$，t_j' …… 增大而缩小 irrelevant

• $y_j=0$，t_j' 不变 ⟶ 固定点连续集



marginal

• 由 $y_j<0$ 的 $\vec{e_j}$ 张成的子空间 定义 critical surface

§ R_b 的大 b 行为与临界指数

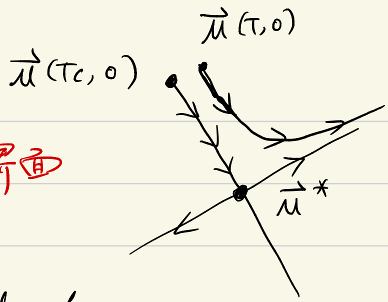
$$P(T,h) \propto e^{-H/T}$$

给定 T, h，也就知道 $\vec{\mu}$，$\vec{\mu} = (a_2, a_4, c, h, \cdots)$

RG 与临界现象的基本假定：$\vec{\mu}(T_c, 0)$ 在不动点 $\vec{\mu}^*$ 的临界面上，即

$$\boxed{\lim_{b\to\infty} R_b\,\vec{\mu}(T_c,0) = \vec{\mu}^*}$$

• 当 $T \neq T_c$，$h \neq 0$ 时，$\vec{\mu}(T,h)$ 不在 critical surface 上



- 考虑 $h=0$. 对于足够小的 $T-T_c$，$\vec{\mu}(T)$ 非常接近临界面
  - $R_b\vec{\mu}(T)$ 随 b 的增加靠近 $\vec{\mu}^*$.
  - 但当 $b\to\infty$，$R_b\vec{\mu}(T,0)$ 会远离 $\vec{\mu}^*$，$\because$ $\vec{\mu}(T)$ 不在 critical surface
  - 离开的方向依赖于 y_j，假设只有一个 $y_j>0$，记为 y_1

定义：$$\delta\vec{\mu}(T)=\vec{\mu}(T)-\vec{\mu}^*=\sum_j t_j(T)\vec{e}_j$$

对于 b 足够大：$$R_b\vec{\mu}(T)\approx\vec{\mu}^*+R_b^L\,\delta\vec{\mu}(T)=\vec{\mu}^*+t_1 b^{y_1}\vec{e}_1+O(b^{y_2})$$

$t_1(T)$ 是 T 的光滑函数，当 $T=T_c$，$t_1(T)=0$，故展开为

$$t_1(T)=A(T-T_c)+B(T-T_c)^2+\cdots \qquad A\neq 0 \text{ 常数}$$

$$R_b\vec{\mu}(T)\approx\vec{\mu}^*+A(T-T_c)\,b^{y_1}\vec{e}_1+O(b^{y_2})$$

定义 $\frac{1}{\nu}\equiv y_1$，$\xi=|A(T-T_c)|^{-\nu}$，于是

$$R_b\vec{\mu}(T)=\vec{\mu}^*\pm\left(\frac{b}{\xi}\right)^{\frac{1}{\nu}}\vec{e}_1+O(b^{y_2})$$

于是：RG 变换将 $\xi\to\xi'=\xi/b$. 即 R_b 将 $T\to T'$，$A(T'-T_c)^{-\nu}=\xi'$

- 现在考虑 $h\neq 0$，我们知道标度变换使得：

$$h'=b^{\frac{1}{2}(d+2-\eta)}h$$

假设（一般也是）η 小，则 $y_h=\frac{1}{2}(d+2-\eta)>0$，$h'$ 随 b 增大而增大.

$$R_b\vec{\mu}(T,h)=\vec{\mu}^*\pm\left(\frac{b}{\xi}\right)^{\frac{1}{\nu}}\vec{e}_1+b^{y_h}h\,\vec{e}_h+O(b^{y_2})$$

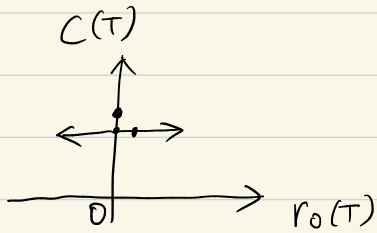
b^{y_h} 是 R_b 在 $\vec{e}_h$ 方向的本征值.

对于 $u=0$ 的子空间，我们知道：

$$\vec{\mu}' = R_b\vec{\mu} = (r_0 b^{2-y}, 0, c b^{-y})$$

① 若 $y=0$，不动点为 $\vec{\mu}^*_G = (0,0,c)$，c 任意

对应 $S^*_G = \frac{c}{2}\int d^dx\, (\nabla\sigma)^2 = \sum_{k,i} -\frac{ck^2}{2L^d}|\sigma_{ik}|^2$



称为高斯不动点，线性化.

$$R_b^L = \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$T \neq T_c$，$\vec{\mu}(T) = \vec{\mu}^* + t_1 \vec{e}_1$，$R_b\vec{\mu}(T) = \vec{\mu}^* + t_1 b^2 \vec{e}_1$

$$\boxed{t_1' = b^2 t \Rightarrow \frac{1}{\nu} = 2,\ \nu = \frac{1}{2},\ y=0} \rightarrow \text{平均场}$$

② $y=2$. 另一个不动点 $\vec{\mu}^*_\infty = (r_0, 0, 0)$，

当 $r_0>0$，对应 $S^*_\infty = \frac{r_0}{2}\int d^dx\, \sigma^2$，$e^{-S^*_\infty} = e^{-\frac{r_0}{2}\int d^dx\, \sigma^2}$

高温不动点：块自旋各自在 $\bar{\sigma}=0$ 涨落

当 $r_0<0$，不动点应写成 $\vec{\mu}^*_{-\infty} = (-|r_0|, 0^+, 0)$，

$$e^{-S^*_{-\infty}} = e^{\frac{|r_0|}{2}\int d^dx\, \sigma^2 - u\int d^dx\, \sigma^4}$$

u 需要为 0^+，否则 u 本无法归一化. 每个块 $\bar{\sigma}$ 都倾向于增大

只要有 $c=0^+$，就有自发磁化. ∴ 描述低温系统.

以上为 ξ 有限，RG 使 $\xi\to 0$，也是不动点

§ 高斯不动点附近的线性化 RG

设 $S = S_0 + S_1$，　R_b 可表示为　$\left(\int \delta\phi \equiv \int \prod_{\frac{\Lambda}{s}<k<\Lambda} \prod_i d\sigma_{i\vec{k}} \right)$

$$e^{-S'+AL^d} = \left[\int \delta\phi \; e^{-S_0-S_1} \right]_{\text{rescale}} = \sigma_{i\vec{k}} \to b^{\frac{1}{2}(d+2-y)} \sigma_{i,b\vec{k}}$$

$$= \left[\frac{\int \delta\phi \; e^{-S_0-S_1}}{\int \delta\phi \; e^{-S_0}} \cdot \int \delta\phi \, e^{-S_0} \right]_{\text{rescale}}$$

$$= \left[e^{-\langle S_1 \rangle_0 + \frac{1}{2}(\langle S_1^2 \rangle_0 - \langle S_1 \rangle_0^2) - \cdots} \cdot \int \delta\phi \, e^{-S_0} \right]_{\text{rescale}}$$

其中 $\langle A \rangle_0 \equiv \dfrac{\int \delta\phi \, e^{-S_0} A}{\int \delta\phi \; e^{-S_0}}$，　部分平均.

现在取高斯不动点 $\mu_G^* = (0, 0, c)$ 对应的作用量 $S_G^* = \frac{c}{2} \int d^d x \, (\nabla \sigma)^2$ 为 S_0

$$\boxed{S_1 = \frac{1}{2} \int d^d x \left(r_0 \sigma^2 + \frac{u}{4} \sigma^4 \right)}$$

我们计算　$\langle S_1 \rangle_0 = \frac{1}{2} \int d^d x \left[r_0 \langle \sigma^2 \rangle_0 + \frac{u}{4} \langle \sigma^4 \rangle_0 \right]$

为此定义：

$$\phi_i(\vec{x}) = \frac{1}{L^d} \sum_{\Lambda/b<k<\Lambda} \sigma_{i\vec{k}} \; e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$\tilde{\sigma}_i(\vec{x}) = \frac{1}{L^d} \sum_{k<\Lambda/b} \sigma_{i\vec{k}} \; e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$\sigma_i(\vec{x}) = \tilde{\sigma}_i(\vec{x}) + \phi_i(\vec{x})$$

- 在 $\langle \cdot \rangle_0$ 的计算中只对 $\frac{\Lambda}{s}<k<\Lambda$ 的 $\sigma_{i\vec{k}}$ 积分，因此 $\tilde{\sigma}$ 是不变的.

又由 $\langle \phi(\vec{x}) \rangle_0 = 0$　(高斯)，有

$$\langle \sigma^2 \rangle_0 = \langle (\tilde{\sigma}^2 + 2\tilde{\sigma}\cdot\phi + \phi^2) \rangle_0 = \tilde{\sigma}^2 + \langle \phi^2 \rangle_0$$

利用 $e^{-S_G^*} = \prod_{\vec{k},i} e^{-\frac{c}{2L^d} k^2 |\sigma_{i\vec{k}}|^2}$

有 $\boxed{\langle \sigma_{i\vec{k}}\, \sigma_{j\vec{k}'} \rangle_0 = \delta_{ij}\, \delta_{\vec{k},-\vec{k}'} \langle |\sigma_{i\vec{k}}|^2 \rangle_0}$

$$\langle \phi^2 \rangle_0 = \sum_i \langle \phi_i^2 \rangle = \frac{1}{L^{2d}} \sum_{\frac{\Lambda}{b}<k<\Lambda} \sum_i \langle \sigma_{i\vec{k}}\, \sigma_{i-\vec{k}} \rangle_0$$

$$= n \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{ck^2} = \frac{nK_d}{c} \int_{\frac{\Lambda}{b}}^{\Lambda} dk\ q^{d-3}$$

其中 $K_d \equiv \frac{2^{-d+1}\pi^{-\frac{d}{2}}}{\Gamma(d/2)}$ 为 d 维空间单位球表面积除以 $(2\pi)^d$.

比如，$K_3 = \frac{2^{-2}\pi^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3}$，$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}$，$K_2 = \frac{2^{-1}\pi^{-1}}{\Gamma(1)=1} = \frac{1}{2\pi} = \frac{2\pi}{(2\pi)^2}$

再定义 $n_c \equiv \frac{nK_d}{c}\frac{\Lambda^{d-2}}{(d-2)}$

$$\boxed{\langle \phi^2 \rangle_0 = n_c\,(1-b^{2-d})}$$

下面计算 $\langle \sigma^4 \rangle_0$，考虑到 $\langle \phi \rangle_0 = 0 = \langle \phi^3 \rangle_0$

$$\langle \sigma^4 \rangle_0 = \langle (\tilde{\sigma}^2 + 2\tilde{\sigma}\cdot\phi + \phi^2)^2 \rangle_0 = \tilde{\sigma}^4 + 2\tilde{\sigma}^2 \langle \phi^2 \rangle_0 + 4\langle (\phi\cdot\tilde{\sigma})^2 \rangle_0 + \langle \phi^4 \rangle_0$$

其中 $\langle (\phi\cdot\tilde{\sigma})^2 \rangle_0 = \sum_i \sum_j \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j \langle \phi_i \phi_j \rangle_0$

$$= \sum_i \tilde{\sigma}_i^2 \langle \phi_i^2 \rangle_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{\sigma}^2}{n} \frac{\langle \phi^2 \rangle_0}{n} = \tilde{\sigma}^2 \frac{\langle \phi^2 \rangle_0}{n}$$

$$\boxed{\langle (\phi\cdot\tilde{\sigma})^2 \rangle_0 = \tilde{\sigma}^2 \frac{n_c}{n}(1-b^{2-d})}$$

类似地 $\boxed{\langle \phi^4 \rangle_0 = (n^2+2n)\left(\frac{n_c}{n}\right)^2 (1-b^{2-d})^2}$

最后，$\langle S_1 \rangle_0 = \frac{1}{2}\int d^dx \left[r_0 \langle \sigma^2 \rangle_0 + \frac{u}{4}\langle \sigma^4 \rangle_0\right] = \frac{1}{2}\int d^dx \left[\tilde{r}_0 \tilde{\sigma}^2 + \frac{1}{4}\tilde{u}\tilde{\sigma}^4\right] + \Delta A \cdot L^d$

$\boxed{\tilde{r}_0 = r_0 + u\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{n_c}{n}(1-b^{2-d}),\quad \tilde{u} = u}$，来自 $\tilde{\sigma}^4$.

来自 $2\tilde{\sigma}^2\langle \phi^2 \rangle$　来自 $4\langle (\phi\cdot\tilde{\sigma})^2 \rangle_0$

$$\Delta A = \frac{1}{2} r_0 n_c (1-b^{2-d}) + \frac{1}{4} u (n^2+2n)\left(\frac{n_c}{n}\right)^2 (1-b^{2-d})^2$$

忽略 $\frac{1}{2}(\langle S_1^2\rangle_0 - \langle S_1\rangle_0^2)$，我们作第二步 rescale

$\sigma_{ik} \to b^{\frac{1}{2}(d+2-y)}\sigma_{i,bk}$ 等效于 $\boxed{\sigma_{ix} \longrightarrow b^{-\frac{1}{2}(d-2+y)}\sigma_{i,x/b}}$

$[\sigma(x)] = [\sigma_k]\cdot L^{-d}$, $\int d^dx = b^d\int d^dx'$, $\because x = bx'$

$$\langle S_1\rangle_{0,\,\text{rescale}} = \frac{1}{2}\int d^dx' \left(r_0'\sigma^2 + \frac{1}{4}u'\sigma^4\right) + \Delta A L^d$$

$$= S_1' + \Delta A L^d$$

其中
$$\boxed{\begin{aligned} r_0' &= b^{2-y}\left[r_0 + u\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{n_c}{n}\left(1-b^{2-d}\right)\right] \\ u' &= b^{4-d-2y}\,u \end{aligned}}$$

这就是 $\vec{\mu}=(r_0,u,c)$ 靠近 $\vec{\mu}_G^*=(0,0,c)$ 的 R_b 公式.

当 $y=0$ 时，其不动点仍然是 $\vec{\mu}_G^*$，在其附近线性化:

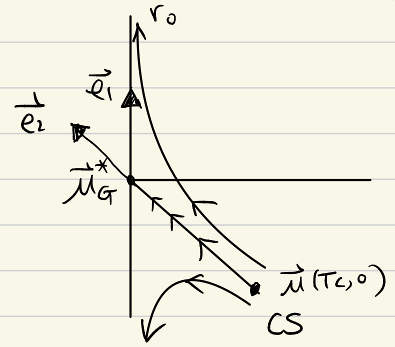
$$\begin{pmatrix} r_0' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 & (b^2-b^{4-d})B \\ 0 & b^{4-d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_0 \\ u \end{pmatrix} \qquad (R_b^L)_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mu_\alpha'}{\partial \mu_\beta}\Big|_{\vec{\mu}^*}, \quad B = \left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{n_c}{n}$$

其本征矢为 $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -B \\ 1 \end{pmatrix}$

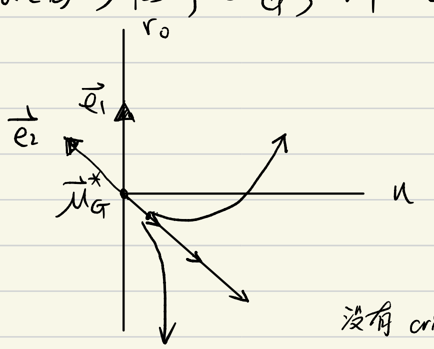
对应本征值: $\lambda_1 = b^2$, $\lambda_2 = b^{4-d}$ $\Rightarrow$ $y_1 = 2 = \frac{1}{\nu}$, $y_2 = 4-d$

根据基本假设，临界点 $\vec{\mu}(T_c,0)$ 在临界面上，只有 $y_2<0$，R_b 才会把 $\vec{\mu}(T_c,0)$ 变换到 $\vec{\mu}_G^*$，临界行为才由 $\vec{\mu}_G^*$ 附近的 R_b^L 决定。即 $d>4$，$\vec{\mu}_G^*$ 稳定.

相反，当 $d<4$，$y_2>0$，R_b 使得 $\vec{\mu}(T_c,0)$ 离开 $\vec{\mu}_G^*$，即 $\vec{\mu}_G^*$ 不决定临界性质.



$d>4$



$d<4$

没有 critical surface

在 $\vec{\mu}_G^*$ 邻域 $\vec{\mu} = \vec{\mu}^* + t_1\vec{e}_1 + u\vec{e}_2 + h\vec{e}_h$

h 表外场，平移变换. $h' = hs^{y_h}$

$y_h = 1 + \frac{d}{2}$