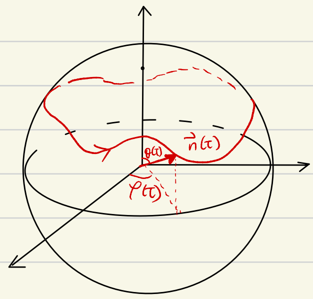
第九讲



上次课研究了单个自旋的路径积分，比如 $H(\vec S) = -\vec S\cdot\vec B$

$$Z=\int_{\vec n(\beta)=\vec n(0)} \mathcal{D}\vec n(\tau)\; e^{-\int_0^\beta d\tau\, [\langle \vec n(\tau)|\frac{d}{d\tau}|\vec n(\tau)\rangle + H(s\vec n(\tau))]}$$

每条路径有相位：$-\int_0^\beta d\tau\, \langle\vec n(\tau)|\frac{d}{d\tau}|\vec n(\tau)\rangle$ 即 Berry phase

具体计算：要求 $|\vec n(\beta)\rangle = |\vec n(0)\rangle e^{in2\pi}$，$n\in\mathbb{Z}$，闭合路径 $\Rightarrow$ $b(\tau) \overset{选}{=} \frac{\varphi(\tau)}{2}$

$$\langle \vec n(\tau)|\frac{d}{d\tau}|\vec n(\tau)\rangle = i\left(\dot b - \frac{\dot\varphi}{2}\cos\theta\right) = \frac{i\dot\varphi}{2}(1-\cos\theta)$$

$$\boxed{\int_0^\beta d\tau\, \langle \vec n(\tau)|\dot{\vec n}(\tau)\rangle = \int_0^\beta d\tau\, \frac{i\dot\varphi}{2}(1-\cos\theta) = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^\theta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{i\Omega}{2} = iS\Omega \overset{定义}{\equiv} 4\pi i S W_0} \quad ②$$

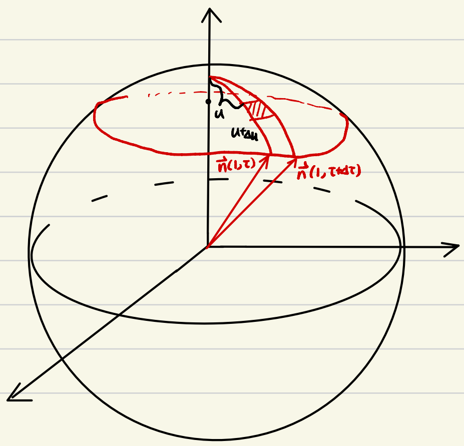
如果选择 $b(\tau) = -\frac{\varphi(\tau)}{2}$，给出 Berry phase $= S(\Omega-4\pi)$

- 只要 S 是 $\frac{1}{2}$ 的整数倍，路径的权重 $e^{-S(\vec n)}$ 不变！从物理角度看，规范选取不能改变物理结果，因此自旋量子数只能为 $\frac{1}{2}$ 的整数倍 $\mapsto$ 拓扑量子化

② 式有非常漂亮的几何意义，但是依赖于球坐标，我们可以将其改写为坐标旋转不变的形式：

$$\boxed{W_0 = \frac{1}{4\pi}\int_0^1 du\int_0^\beta d\tau\; \vec n(u,\tau)\cdot\left[\frac{\partial\vec n(u,\tau)}{\partial u}\times\frac{\partial \vec n(u,\tau)}{\partial\tau}\right]} \quad ③$$

我们引入了辅助坐标 $u\in[0,1]$，将 $\vec n(\tau)$ 扩展到 $\vec n(u,t)$，$\vec n(0,\tau)=\hat z$，$\vec n(1,\tau)=\vec n(\tau)$.



以上公式称为 Wess-Zumino-Witten (WZW) action

图中阴影面积为：$\vec n(u,\tau)\cdot\left[\frac{\partial\vec n(u,\tau)}{\partial u}\times\frac{\partial\vec n(u,\tau)}{\partial\tau}\right]$

注释：量子力学原理：$|\alpha\rangle$ 有 gauge 自由，即 $|\vec{n}(t)\rangle$ 与 $|\vec{n}(t)\rangle' = |\vec{n}(t)\rangle e^{ib(t)}$ 表示同一个态。

在一个规范下计算：

$$\gamma(t') = i\int_0^{t'} dt \, \langle \vec{n}(t)| \frac{d}{dt} |\vec{n}(t)\rangle$$

则在另一规范 $|\vec{n}(t)\rangle e^{ib(t)}$ 下，

$$\gamma(t') \longrightarrow \tilde{\gamma}(t') = \gamma(t') + i\int_0^{t'} i\,\dot{b}(t)dt = \gamma(t') + b(0) - b(t')$$

即不同的 Gauge 给出不同的 $\gamma(t')$！

由于 $|\vec{n}(t)\rangle$ 与 $|\vec{n}(t+\Delta t)\rangle$ 几乎"平行"（在 Δt 内变化不大）

$$\langle \vec{n}(t) | \vec{n}(t+\Delta t)\rangle = 1 + \Delta t \, \underset{\uparrow \text{纯虚数}}{\langle \vec{n}(t)| \frac{d}{dt} |\vec{n}(t)\rangle} \approx e^{i\Delta\phi}$$

我们可以在每一小步选取一个规范，使得 $\Delta\phi = 0$，

$$\left(\langle \vec{n}(t)| \cdot |\vec{n}(t+\Delta t)\rangle\right)' = e^{-ib(t)} \langle \vec{n}(t)| \vec{n}(t+\Delta t)\rangle e^{ib(t+\Delta t)} = e^{i\Delta\phi + i\Delta b} = 1$$

从而

$$\tilde{\gamma}(t') = i\int_0^{t'} dt \, \frac{\left(\langle \vec{n}(t)| \vec{n}(t+\Delta t)\rangle\right)' - \left(\langle \vec{n}(t)|\vec{n}(t)\rangle\right)'}{\Delta t} = 0$$

或者说使 $b(t') - b(0) = \gamma(t')$

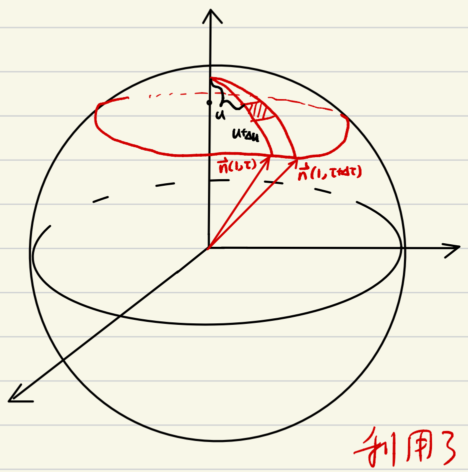
但是对于封闭路径：$|\vec{n}(t')\rangle$ 与 $|\vec{n}(0)\rangle$ 是同一个量子态

gauge 变换：$|\vec{n}(t)\rangle \rightarrow |\vec{n}(t)\rangle e^{ib(t)}$ 使得 $|\vec{n}(0)\rangle \rightarrow |\vec{n}(0)\rangle e^{ib(0)}$，$|\vec{n}(t')\rangle \rightarrow |\vec{n}(t')\rangle e^{ib(t')}$

必须还是同一个量子态，因此 $e^{ib(0)} = e^{ib(t')}$ 即 $b(t') = b(0) + n\cdot 2\pi$，$n \in \mathbb{Z}$

$\gamma(t')$ 只能相差 2π 的整数倍！

- 利用 $S(\tau)$ 推导经典运动方程：力矩方程



W_0 的变分只与边界 $\vec{n}(1,\tau)$ 有关！

$$\delta W_0 = \frac{1}{4\pi}\int_0^1 du\int_0^\beta d\tau\ \vec{n}\cdot\left[\frac{\partial\,\delta\vec{n}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{n}}{\partial\tau}\right]+\vec{n}\cdot\left[\frac{\partial\vec{n}}{\partial u}\times\frac{\partial\,\delta\vec{n}}{\partial\tau}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^1 du\int_0^\beta d\tau\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\vec{n}\cdot\left(\delta\vec{n}\times\frac{\partial\vec{n}}{\partial\tau}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\vec{n}\cdot\left(\frac{\partial\vec{n}}{\partial u}\times\delta\vec{n}\right)\right]\right\}$$

$$\boxed{\delta W_0 = \frac{1}{4\pi}\int_0^\beta dt\,\delta\vec{n}\cdot(\dot{\vec{n}}\times\vec{n})}$$ ☆

利用了：$\delta\vec{n}\cdot\frac{\partial\vec{n}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{n}}{\partial\tau}=0$，$\vec{n}\cdot\left(\delta\vec{n}\times\frac{\partial^2\vec{n}}{\partial u\partial\tau}\right)+\vec{n}\cdot\left(\frac{\partial^2\vec{n}}{\partial u\partial\tau}\times\delta\vec{n}\right)=0$

τ 方向的周期性 $\Rightarrow \int_0^\beta d\tau\,\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\vec{n}\cdot\left(\frac{\partial\vec{n}}{\partial u}\times\delta\vec{n}\right)\right]=0$

我们写出作用量：

$$S(\vec{n}) = 4\pi i S W_0+\int_0^\beta d\tau\, H(S\vec{n})$$

计算 δS：

$$\delta\int_0^\beta d\tau\, H(S\vec{n}) = \int d\tau\,\delta\vec{n}\cdot\frac{\partial H(S\vec{n})}{\partial\vec{n}}$$

比如 $H=-\vec{B}\cdot\vec{S} \Rightarrow H(S\vec{n})=-S\,\vec{B}\cdot\vec{n} \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial\vec{n}}=-\vec{B}S$

$$\Rightarrow \delta\int_0^\beta d\tau\, H(S\vec{n}) = -S\int d\tau\,\delta\vec{n}\cdot\vec{B}$$

由 $\delta S(\vec{n})=0 \Rightarrow iS(\dot{\vec{n}}\times\vec{n})-S\vec{B}=0$.

将 $d\tau$ 换成 idt $\Rightarrow \frac{d\vec{n}}{dt}\times\vec{n}=\vec{B} \Rightarrow \vec{n}\times\left(\frac{d\vec{n}}{dt}\times\vec{n}\right)=\vec{n}\times\vec{B}$

注意 $\vec{n}\cdot d\vec{n}=0$，$\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$

$$\Rightarrow S\frac{d\vec{n}}{dt}=S\,\vec{n}\times\vec{B}$$

此即经典力矩方程 $\frac{d\vec{S}}{dt}=\vec{\mu}\times\vec{B}$

我们看到要得到经典方程，必须有 Berry phase！

§ spin chain 自旋链

考虑 Heisenberg chain:
$$\boxed{H = J\sum_i \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1} - \sum_i h_i \cdot \vec{S}_j} \quad (1)$$

J为相互作用, h_i 为外场.

由 Heisenberg 方程:
$$\boxed{\partial_t \vec{S}_j = \frac{1}{i}[\vec{S}_j, H] = -(\vec{S}_{j-1}+\vec{S}_{j+1})\times\vec{S}_j + h_j \times \vec{S}_j} \quad (2)$$

利用了对易关系. $[\vec{S}, \vec{A}\cdot\vec{S}] = \vec{A}\times\vec{S}$

作用量
$$\boxed{\mathcal{S} = 4\pi i S \sum_i W_0(\vec{n}_i) + \int_0^\beta d\tau\, H(s\vec{n}_1, s\vec{n}_2, \cdots, s\vec{n}_L)} \quad (3)$$

推导与单自旋量化, 但将 $|\vec{n}\rangle$ 推广到 $|\vec{n}_1, \vec{n}_2, \cdots, \vec{n}_L\rangle = |\vec{n}_1\rangle\otimes|\vec{n}_2\rangle\otimes\cdots\otimes|\vec{n}_L\rangle$

$$Z = \int \prod_{i=1}^{L} d\vec{n}_i \langle \vec{n}_1, \cdots, \vec{n}_L| e^{-\beta H} |\vec{n}_1, \cdots, \vec{n}_L\rangle$$

同样将 β 分成 N 份, $\Delta\tau = \frac{\beta}{N}$, 　利用 $\langle\vec{n}|\hat{\vec{S}}|\vec{n}\rangle = s\vec{n}$

$$\langle \vec{n}_1(\tau), \vec{n}_2(\tau), \cdots, \vec{n}_L(\tau)| \hat{H}(\vec{S}_1, \vec{S}_2, \cdots, \vec{S}_L) |\vec{n}_1(\tau), \vec{n}_2(\tau), \cdots, \vec{n}_L(\tau)\rangle = H(s\vec{n}_1(\tau), s\vec{n}_2(\tau), \cdots, s\vec{n}_L(\tau))$$

例: $H = \vec{S}_1\cdot\vec{S}_2$, $\langle \vec{n}_1(\tau), \vec{n}_2(\tau)|\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2|\vec{n}_1(\tau), \vec{n}_2(\tau)\rangle = \langle\vec{n}_1(\tau)|\vec{S}_1|\vec{n}_1(\tau)\rangle\cdot\langle\vec{n}_2(\tau)|\vec{S}_2|\vec{n}_2(\tau)\rangle = s\vec{n}_1\cdot s\vec{n}_2$

$$\langle \vec{n}_1(\tau), \cdots, \vec{n}_L(\tau)| \frac{d}{d\tau} |\vec{n}_1(\tau), \cdots, \vec{n}_L(\tau)\rangle = \langle \vec{n}_1(\tau), \cdots, \vec{n}_L(\tau)| \left[\sum_i |\vec{n}_1(\tau)\rangle\otimes\cdots\frac{d}{d\tau}|\vec{n}_i(\tau)\rangle\cdots\otimes|\vec{n}_L(\tau)\rangle\right]$$

$$= \sum_i \langle \vec{n}_i(\tau)|\frac{d}{d\tau}|\vec{n}_i(\tau)\rangle$$

由 $\delta S = 0$, 并注意 $d\tau = i\,dt$, 可导出 (2) 式.