

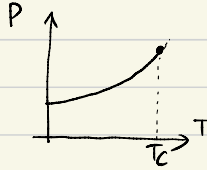
本课程讨论相变 (phase transition)

相变: 物质性质的突变, 不连续, 不光滑的转变. 例: 水的沸腾, 液 He 转变或超流, 超导 → 超导体.

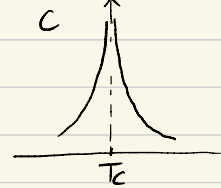
不好描述: 熟悉的物理: 光滑或缓慢. 变, 变, 变.  $\frac{\partial V}{\partial X}$ ,  $\partial V$ , "号" → 光滑, 微积分.

相变告诉我们: 大量粒子的集体行为可以非常不同于单个粒子: 宏观性质可以不光滑地变化

特别是在临界点 (critical point) 不同物质不同的微观组或表现出一样行为

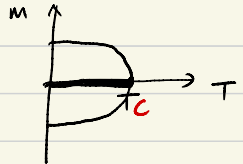


$$C \sim \frac{1}{|T - T_c|^{0.11008}}$$



0.11008... 类似  $\pi$ ,  $e$  一样的常数.

对所有气体一样. 在某些确保的相变子, 也一样. (单轴铁磁体)



C: 本来是 Curie, 发现指 critical 也对.

系统对微观细节的记忆被完全遗忘. 留下一些共同的东西. 这说 "普适性" universality

除了有趣的物理, 我们研究相变的理由还包括:

发展新工具和思维方式来理解相变. 导致新范式 (paradigm)

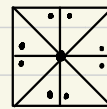
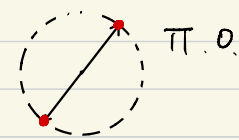
现代物理的范式 (paradigm) 围绕 two deep facts about the Universe:

• Nature is organised by symmetry,

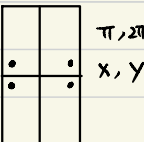
何物态的分类: 固, 液, 气, 等离子体



绕子轴任意旋转.



子轴  $\pi, \pi, \pi, \pi$  } 8个对称操作. 反射:  $x, y, \pi, \pi$



Landau: phases 由 (破缺的) 对称性刻画

固体不同于液体是因为晶格破缺了空间的平移和旋转对称性. 不同的晶格结构视为不同 phases of matter: 因为它们破缺对称性的方式不同.

液体与气体没有破缺平移与旋转对称性, 可视为同一个相.

考虑更多的对称性, 我们理解几乎所有物质形态. (不包括超导体).

过筛分类, 好处: 1. 改变物质时对称性一定会有剧烈的相变. 2. 理解了系统的对称性可立子确定其许多性质

我们在讨论相变问题时发展出的所有 ideas 都可以直接用到 粒子物理、宇宙学 and beyond!

真空更像复单的材料, 其量子涨落起到热涨落类似的作用. 它处于不同的相, 在宇宙爆炸冷却的过程中发生多次相变.

## ● Nature is organised by scale

顺序

little things affect big things

粒子  $\rightarrow$  核  $\rightarrow$  原子  $\rightarrow$  凝聚态, 分子  $\rightarrow$  ...  
不会相反, 所以大子里边有占星系.

But, another aspect:

little things affect big things, but they rarely affect very big things, but slightly bigger things, and so on.

As you go up the chain, you lose the information about what came long before.

研究椋鸟群聚的动物学家不需要研究 Higgs boson 的粒子

牛顿, Einstein 不需要知道 Quantum gravity 可以写下他们的方程!

RG provides a framework that makes these ideas concrete.

It describes physics at different scales.

The right way to understand both the Higgs boson and the flocking of starlings is through the language of the RG

Symmetry and scale: 决定了我们对物理的思考.

都来自于一个 simple Question: 烧开水时发生了什么?

1. Density Operator

量子力学可预言实验, 但是统计性地预言. 比如一个粒子处于态  $|\alpha\rangle$ , 我们测力学量  $A$ .

首先  $A|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle$ .  $a$  本征值,  $|\alpha\rangle$  属于  $a$  的本征态,  $\sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbb{1}$  完备.

$$|\alpha\rangle = \sum_{\alpha} C_{\alpha} |\alpha\rangle, \quad \text{其中 } C_{\alpha} = \langle\alpha|\alpha\rangle,$$

$$\langle A \rangle = \sum_{\alpha} a |C_{\alpha}|^2 = \langle\alpha| A |\alpha\rangle$$

测  $A$  得  $a$  的几率为  $|C_{\alpha}|^2$ . 实验上怎么体现  $|C_{\alpha}|^2$ ? 怎么体现  $\langle A \rangle$ ?

引入 ensemble:  $N$  个一样的系统 (不一定是单粒子或为粒子), ( $N$  是大量的) 构成一个系统  
测  $A$  时有  $N \cdot |C_{\alpha}|^2$  个系统读数为  $a$ ,  $\langle A \rangle = \sum_{\alpha} a |C_{\alpha}|^2 \leftarrow$  统计平均.

这是一个“纯态”系综:  $|\alpha\rangle$  每个成员都处于同一个量子态.

还有一种情况: 比如炉子里飞出来的银原子, 按完全相同的几率处于  $|\alpha\rangle$ , 它是空间分布.

即  $N$  个粒子按几率  $P_i$  处于某一个量子态  $|\alpha^{(i)}\rangle$  我们测量  $A$  的结果怎样? ( $i=1, 2, \dots, M$ )

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_i P_i \langle \alpha^{(i)} | A | \alpha^{(i)} \rangle, \quad \text{量子平均} + \text{经典平均} \\ &= \sum_i P_i \sum_{\alpha} \langle \alpha^{(i)} | A | \alpha \rangle \langle \alpha | \alpha^{(i)} \rangle = \sum_i P_i \sum_{\alpha} a |C_{\alpha}^{(i)}|^2 \quad \text{其中 } C_{\alpha}^{(i)} = \langle \alpha | \alpha^{(i)} \rangle, \end{aligned}$$

实验上怎么体现这种情况?

引入“混态系综”:  $N_i$  个成员处于  $|\alpha^{(i)}\rangle$  态,  $\frac{N_i}{N} = P_i$  ( $N \rightarrow \infty$ ). ( $\sum_i P_i = 1$ )

这  $N_i$  个系统中  $N_i |C_{\alpha}^{(i)}|^2$  个系统测得  $a$ . 总的测得  $a$  的几率为  $\sum_{i=1}^M N_i |C_{\alpha}^{(i)}|^2$ ,  $\langle A \rangle = \frac{\sum_{i=1}^M [a \cdot \sum N_i |C_{\alpha}^{(i)}|^2]}{N}$

Note:  $|\alpha^{(i)}\rangle$  并不要求正交,  $M$  可以大于  $D$  (Hilbert space 维度)

eg. 单自旋系综.  $P=0.3, |+\rangle$ ;  $B=0.5, |+\rangle$ ;  $B=0.2, |-\rangle$

即使对纯态系综, 测  $A$  的结果也可能不同; 几率  $|C_{\alpha}|^2$  得  $a$ ; 混态系综里一个系统得  $a$  的几率 =  $\sum_{i=1}^M P_i |C_{\alpha}^{(i)}|^2$

• 定义 Density operator  $\rho = \sum_i P_i |\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}|$ ,  $B|b\rangle = b|b\rangle \leftarrow B \text{ 表象 } |b\rangle\}$

如更一般需要:  $\langle A \rangle = \sum_i P_i \langle\alpha^{(i)}|A|\alpha^{(i)}\rangle = \sum_i P_i \sum_{b,b'} \langle\alpha^{(i)}|b\rangle \langle b|A|b'\rangle \langle b'|\alpha^{(i)}\rangle$

$$= \sum_i P_i \sum_{b,b'} \langle b'|\alpha^{(i)}\rangle \langle\alpha^{(i)}|b\rangle \langle b|A|b'\rangle$$

$$= \sum_{b',b} \langle b'| \sum_i P_i |\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}| b\rangle \langle b|A|b'\rangle$$

$$= \sum_b \langle b'| \sum_i P_i |\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}| A |b\rangle$$

$$= \text{Tr}(\rho A) \quad \text{与表象无关}$$

$$\cdot \rho_{bb'} = \langle b| \sum_i P_i |\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}| |b'\rangle$$

$$\cdot \text{Tr} \rho = 1 \quad \text{类似 } \sum_i P_i = 1$$

$$\text{证: } \text{Tr} \rho = \sum_b \langle b| \sum_i P_i |\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}| |b\rangle = \sum_i P_i \sum_b \langle b|\alpha^{(i)}\rangle\langle\alpha^{(i)}|b\rangle = \sum_i P_i \sum_b \langle\alpha^{(i)}|b\rangle\langle b|\alpha^{(i)}\rangle$$

$$\cdot \rho_{bb'} = \rho_{b'b}^* \quad \text{Hermitian, 实 eigenvalue.}$$

纯态序.  $\rho = |\alpha\rangle\langle\alpha| \Rightarrow \rho^2 = |\alpha\rangle\langle\alpha| \cdot |\alpha\rangle\langle\alpha| = \rho \Rightarrow \rho(\rho-1)=0 \Rightarrow$  特征值为 0 或 1.

证: 设  $\rho(\rho-1)|p\rangle = \rho'|p\rangle$  那么  $\rho'(\rho-1)|p\rangle = 0 \Rightarrow \rho'=0$  or 1.

由于  $\text{Tr} \rho = 1$  : 在  $\rho$  自己表象下.  $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

例: 自旋处于确定量态.  $|+\rangle$ .

$$|+\rangle\langle+| = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle+|-\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}\langle+| \langle+| = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+| + |+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|), \rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{这是在 } S_z \text{ 表象}$$

$$\text{在 } S_x \text{ 表象: } |+\rangle\langle+| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{基 } |+\rangle, |-\rangle$$

另一极端 完全随机态序: 在自己表象下.  $\frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  例: 自旋在炉子里.  $\rho = \frac{1}{2}|+\rangle\langle+| + \frac{1}{2}|-\rangle\langle-| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$



怎样刻画它们的区别?

差于 Shannon 熵,  $S = -\sum_i p_i \ln p_i$ , 引入 Von Neumann Entropy.

$$S = -\text{Tr}(\rho \ln \rho) = -\sum_k p_k \ln p_k, \text{ 其中 } \rho |k\rangle = p_k |k\rangle, \langle k|k'\rangle = \delta_{kk'}.$$

$$S = -\sum_k \langle k|\rho \ln \rho|k\rangle = -\sum_{kk'} \langle k|\rho|k'\rangle \langle k'|\ln \rho|k\rangle = -\sum_k p_{kk} \ln p_{kk}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{随机: } S = \ln N \text{ : 无序: 系统处于任意量子态, 量大熵.} \\ \text{pure: } S = 0 \text{ : 有序: 所有系统处于同一量子态.} \end{array} \right.$