第十一讲

§2.2.2 The correlation Function is a Green's Function

$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle$ 也可在 real space 计算。我们首先学习多重高斯积分。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^n y \; e^{-\frac{1}{2}\vec{y}^T G^{-1}\cdot\vec{y}} = \det^{\frac{1}{2}}(2\pi G) .$$

对比 $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{x^2}{2a}} = \sqrt{2\pi a}$

这里 G^{-1} 是 $n\times n$ 实对称矩阵。$\vec{y}$ 是 n 元矢量

进一步：

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^n y \; e^{-\frac{1}{2}\vec{y}^T\cdot G^{-1}\cdot\vec{y} + \vec{B}\cdot\vec{y}} = \det^{\frac{1}{2}}(2\pi G)\, e^{\frac{1}{2}\vec{B}\cdot G\vec{B}} \qquad (1)$$

对比 $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{x^2}{2a}+bx} = \sqrt{2\pi a}\, e^{\frac{b^2 a}{2}}$

进而推广到无穷维来计算 Z.

首先将

$$F[\phi(\vec{x})] = \int d\vec{x} \left[\frac{1}{2}\gamma(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2(\vec{x}) - B(\vec{x})\,\phi(\vec{x})\right]$$

改写成

$\left(\text{利用} \int d^d x\,(\nabla\phi)^2 = -\int d^d x\,\phi\,\nabla^2\phi\right)$

$$F[\phi(\vec{x})] = \int d^d x \int d^d y\; \frac{1}{2}\phi(\vec{x})\, G^{-1}(\vec{x},\vec{y})\,\phi(\vec{y}) - \int d^d x\; B(\vec{x})\phi(\vec{x})$$

其中

$$\boxed{G^{-1}(\vec{x},\vec{y}) = \delta^d(\vec{x}-\vec{y})(-\gamma\nabla_y^2 + \mu^2)} \qquad (2)$$

可理解为一个对角矩阵

我们可以由高斯积分直接计算 Z

$$\boxed{Z = \int \mathcal{D}\phi\; e^{-\beta\left[\int d^d x\, d^d y\, \frac{1}{2}\phi(\vec{x})\, G^{-1}(\vec{x},\vec{y})\,\phi(\vec{y}) - \int d^d x\, B(\vec{x})\phi(\vec{x})\right]}}$$

原则上求出 G 即可根据 (1) 式写出 Z

$$Z = \det^{\frac{1}{2}}(2\pi G)\, e^{\frac{\beta}{2}\int B(\vec{x})\, G(\vec{x}-\vec{y})\, B(\vec{y})\, d^d x\, d^d y}$$

问：G^{-1} 的逆 G 是什么？它应满足如下方程

$$\int d^d y\; G^{-1}(x,y)\, G(y,z) = \int \delta^d(\vec{x}-\vec{y})\,(-\gamma\nabla_y^2+\mu^2)\, G(y,z)\, d^d y = \delta^d(\vec{x}-\vec{z})$$

这要求：

$$\boxed{(-\gamma\nabla_y^2+\mu^2)\; G(y,z) = \delta^d(\vec{y}-\vec{z})} \qquad (3)$$

对比 原点处点电荷的电势 $\phi(\vec{x})$

$-\nabla^2\phi(\vec{x}) = \delta^d(\vec{x})$

即 z 处有源　$G(\vec{x},\vec{y})$ 称为格林函数 (Green's function)

由平移对称性，有 $G(\vec{x},\vec{y}) = G(\vec{x}-\vec{y})$，我们上节得到的 $G(\vec{x})$

$$G(\vec{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\gamma k^2 + \mu^2}$$

正是方程(3)的解

证明：直接代入：

$$(-\gamma\nabla_x^2 + \mu^2) G(\vec{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(\gamma k^2 + \mu^2) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\gamma k^2 + \mu^2} = \delta^d(\vec{x})$$

于是，

$$\boxed{Z = \det^{\frac{1}{2}}(2\pi G)\, e^{\frac{\beta}{2}\int B(\vec{x})\, G(\vec{x}-\vec{y})\, B(\vec{y})\, d^d x\, d^d y}}$$

进而得到一样的 $\langle\phi(\vec{x})\phi(\vec{y})\rangle$ 结果. $\left(\text{利用 } \langle\phi(\vec{x})\phi(\vec{y})\rangle = \frac{1}{\beta^2}\frac{\delta \ln Z}{\delta B(\vec{x})\delta B(\vec{y})}\right)$

$$\langle\phi(\vec{x})\phi(\vec{y})\rangle = \frac{1}{\beta} G(\vec{x},\vec{y})$$

因此(3)式也可以写成

$$(-\gamma\nabla^2 + \mu^2)\langle\phi(\vec{x})\phi(0)\rangle = \frac{1}{\beta}\delta^d(\vec{x}-0)$$

怎样理解？ 如果我们对高斯近似下自由能 $F = \frac{1}{2}\int d^d x\, \phi(\gamma\nabla^2+\mu^2)\phi$ 在原点加点扰动 $B(\vec{x}) = \delta^d(\vec{x}-0)$

$$F \longrightarrow F - \int \delta^d(\vec{x}-0)\phi(\vec{x})\, d^d x$$

saddle point 方程：$(\mu^2 - \gamma\nabla^2)\phi(\vec{x}) = \delta^d(\vec{x}-0)$ 给出的 $\phi(\vec{x})$ 其实是 $\beta\langle\phi(\vec{x})\phi(0)\rangle$. （忽略 ϕ^4）

- 关联函数还与磁化率(susceptibility)相关：

一般 $\chi = \frac{\partial\langle m\rangle}{\partial B}$，$B$ 是均匀磁场. 引入更细致的定义：$\vec{x}$ 点 ϕ 对 $\vec{y}$ 点 $\delta B(\vec{y})$ 的响应：

$$\boxed{\chi(\vec{x},\vec{y}) \equiv \frac{\delta\langle\phi(\vec{x})\rangle}{\delta B(\vec{y})}}$$

由于 $\langle\phi(\vec{x})\rangle = \frac{1}{\beta}\frac{\delta \ln Z}{\delta B(\vec{x})}$ $\Rightarrow$ $\frac{\delta\langle\phi(\vec{x})\rangle}{\delta B(\vec{y})} = \frac{1}{\beta}\frac{\delta^2 \ln Z}{\delta B(\vec{y})\delta B(\vec{x})} = \beta\langle\phi(\vec{x})\phi(\vec{y})\rangle$

根据上面的讨论：$\boxed{\chi(\vec{x},\vec{y}) = \beta\langle\phi(\vec{x})\phi(\vec{y})\rangle}$

$\chi = \frac{\partial\langle m\rangle}{\partial B}$ ätt 定义在均匀磁场中. $\chi = \int d^d x\, \chi(0,\vec{x}) = \int d^d x\, \chi(\vec{x},0) = \beta\int d^d x\langle\phi(\vec{x})\phi(0)\rangle$

- 均匀磁化率是关联函数的积分

两点关联函数又称 propagator.

也出现在 QFT：由于在 Minkowski 空间，要区分 advanced, retarded, and Feynman

§2.2.3 The correlation Length. (关联长度)

前面我们推导出了

$$\langle\phi(\vec{x})\phi(\vec{y})\rangle \sim \begin{cases} \dfrac{1}{r^{d-2}} & r \ll \xi \\ \dfrac{e^{-r/\xi}}{r^{\frac{d-1}{2}}} & r \gg \xi \end{cases}$$

其中 $\xi = \sqrt{\gamma/\mu^2}$. 称为关联长度

ξ 给出一个特征长度. 当 $r \gg \xi$, 关联迅速衰变到 0.

在 $r \ll \xi$ 的尺度下，关联函数按幂律 (power law) 缓慢衰减.

想象系统由一些 patches 组成，其平均 $\bar{m} \sim \langle m\rangle$, 尺寸不会大于 ξ

由于靠近临界点 $\mu^2 \sim |T-T_c|$, 因此 $\xi \sim \dfrac{1}{|T-T_c|^{\frac{1}{2}}}$,

在 T_c 处，系统有任意大尺寸的涨落，这是临界现象的本质

两个新的临界指数:

$$\xi \sim \frac{1}{|T-T_c|^{\nu}} \Rightarrow \text{高斯近似下} \quad \nu = \frac{1}{2}$$

$$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}} \Rightarrow \quad \eta = 0.$$

有时也称 Mean field 指数.

对比:

	MF	d=2	d=3
η	0	$\frac{1}{4}$	0.0363
ν	$\frac{1}{2}$	1	0.6300

(d=2, d=3: 真实)

- Ising 模型的数值模拟:

  离开相变点，有特征长度. 集团大小

  $T=T_c$. 没有特征长度，各种尺度的集团都有

数学补充：高斯积分及Wick定理

参考 A. Zee: Quantum Field theory in a Nutshell.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a}} = (2\pi a)^{\frac{1}{2}} = Z$$ ⟵ 配分函数. $e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a}} = W(x)$ 为权重

$$\langle x^2\rangle \equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a}}\, x^2}{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a}}} = -2\frac{d}{d(\frac{1}{a})}\ln Z = \frac{-2}{2}\frac{d}{d(\frac{1}{a})}(\ln 2\pi - \ln a) = a$$

$$\langle x^4\rangle = \frac{4}{Z}\frac{d^2}{d(\frac{1}{a})^2}Z = 1\times 3\cdot a^2$$

设 $\langle x^{2n}\rangle = a^n (2n-1)!!$ ⟵ 数学归纳法证明

$$\langle x^{2(n+1)}\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a}} x^{2n}\cdot x^2}{Z} = \frac{2a^2\frac{d}{da}\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{x^2}{2a}} x^{2n}\right]}{Z}$$

$$= 2a^2\left[\frac{d}{da}\left(\frac{1}{Z}\int dx\, e^{-\frac{x^2}{2a}} x^{2n}\right) + \frac{1}{Z^2}\int dx\, e^{-\frac{x^2}{2a}} x^{2n}\frac{dZ}{da}\right]$$

$$= 2a^2\frac{d}{da}\left[a^n(2n-1)!!\right] + \frac{2a^2 a^n (2n-1)!!}{(2\pi a)^{\frac{1}{2}}}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}$$

$$= (2n+1)(2n-1)!!\, a^{n+1}$$

怎样记住这个公式: a^n 可根据量纲得到

$(2n-1)!!$: $2n$个点，有多少种方式成对联接它们?

第一个点有$(2n-1)$种连法. 剩下$2n-2$个点，第2个点有$2n-3$个连法.

例: $\langle x^6\rangle \longrightarrow \langle x\,x\,x\,x\,x\,x\rangle$ Wick contraction

每个Wick contraction 都相等 a^3 共有 $5\times3\times1=15$ 个

• 重要条件:

• $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a}+Jx} = (2\pi a)^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{aJ^2}{2}},$$ $-\frac{1}{2}ax^2+Jx = -\frac{1}{2}a(x-\frac{J}{a})^2+\frac{J^2}{2a}$

• $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2a}x^2+iJx} = (2\pi a)^{\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{aJ^2}{2}}$$

• $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{\frac{1}{2}\frac{ix^2}{a}+iJx} = (2\pi i a)^{\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{iaJ^2}{2}}$$

$\frac{i}{2}ax^2 - iJx = \frac{i}{2}a(x+\frac{J}{a})^2 - \frac{iJ^2}{2a}$

推广到高维

• $a \to A_{ij}$: real symmetric $N\times N$ $\qquad x \to x_i$, $i=1,2,\cdots,N$

$$\boxed{\int dx_1 dx_2\cdots dx_N \; e^{-\frac{1}{2}xAx + J\cdot x} = \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{(\det A)^{\frac{1}{2}}}\; e^{\frac{1}{2}J\cdot A^{-1}\cdot J}} \qquad (A)$$

证明: 设 $A = O^{-1}\cdot D\cdot O$, $\quad D_{ij} = D_{ii}\delta_{ij}$ 即 A 通过正交矩阵 O 对角化: $O^T = O^{-1}$

令 $y_i = O_{ij}x_j$ 记为 $y = Ox$ 列矢, $y^T = x^T O^T$ 行矢. $\because O^T = O^{-1}$ $\quad y_j = x_i O^T_{ij} = x_i O^{-1}_{ij}$

$$xAx = x_iA_{ij}x_j = x_i O^{-1}_{il} D_{lm} \underline{O_{mj}x_j} = y_l D_{lm} y_m = y_l D_{ll}\delta_{lm} y_m = y_l^2 D_{ll}$$

$$J\cdot x = J_i x_i = J_i O^{-1}_{ik} O_{kj} x_j = \tilde{J}_k y_k \to \tilde{J}^T y, \text{ 其中 } \tilde{J}_k = J_i O^{-1}_{ik}$$

$O^T O = \mathbb{1}$, $|AB| = |A|\cdot|B|$ $\Rightarrow |O^T|\cdot|O| = 1$, $|O^T| = |O|$ $\Rightarrow |O| = 1$.

• 积分换元: $\int dx_1dx_2\cdots dx_n = \int \frac{dy_1 dy_2\cdots dy_N}{|O|}$

$$I = \int dy_1\cdots dy_n \; e^{-\frac{1}{2}D_{ll}y_l^2 + \tilde{J}_l y_l} = \prod_l \left(\frac{2\pi}{D_{ll}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\tilde{J}_l^2}{2D_{ll}}} = \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{(\det A)^{\frac{1}{2}}} \prod_l e^{\frac{\tilde{J}_l^2}{2D_{ll}}}$$

(行) $\tilde{J}_k = J_i O^{-1}_{ik}$, $\quad$ 转置: $\quad O_{kj}J_j = \tilde{J}_k$ (列) $\to \tilde{J}$

$$\sum_l \frac{\tilde{J}_l^2}{D_{ll}} = \sum_l J_i O^{-1}_{il}\frac{1}{D_{ll}} O_{lj} J_j = \sum_{lm} J_i O^{-1}_{il}\frac{1}{D_{ll}}\delta_{lm} O_{mj} J_j$$

$\because A = O^{-1}\cdot D\cdot O \Rightarrow A^{-1} = (O^{-1}\cdot D\cdot O)^{-1}$

$\because (AB)(AB)^{-1} = \mathbb{1} \Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \Rightarrow (O^{-1}D\cdot O)^{-1} = O^{-1}\cdot D^{-1}\cdot O$

$\therefore A^{-1} = O^{-1}D^{-1}O$

$\therefore \sum_l \frac{\tilde{J}_l^2}{D_{ll}} = J_i A^{-1}_{ij} J_j$

• 推广: 放入一些 i's

$$\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{N} dx_i \; e^{\frac{i}{2}x\cdot A\cdot x + iJ\cdot x} = \frac{(2\pi i)^{\frac{N}{2}}}{\det[A]^{\frac{1}{2}}}\; e^{-\frac{i}{2}J\cdot A^{-1}\cdot J}$$