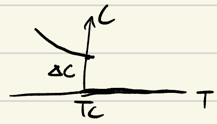
第十二讲

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-\beta F[\phi]} = e^{-\beta F_{thermo}}$$



Landau-Ginzburg. $F = \int d^d x \left[\frac{1}{2} a_2 \phi^2 + \frac{1}{4} a_4 \phi^4 + \frac{\gamma}{2}(\nabla\phi)^2 + \dots\right]$

最小作用量. $\delta F = 0 \Rightarrow$ saddle point 方程. $\nabla^2\phi = a_2\phi + a_4\phi^3$. $\longleftarrow$ 经典力学.

基态 GS: $m_0 = \begin{cases} \sqrt{\frac{-\alpha_2}{\alpha_4}}, & \phi(x) = m_0 \quad T<T_c \\ 0. & \quad\quad\quad\quad\;\; T>T_c \end{cases}$ | 比热跳变 ΔC.

有domain wall的不是GS，在1D也会大量出现. $\longrightarrow$ 下临界维数 $d_l = 1$. (for Ising)

我们想考虑偏离经典的路径对 Z 的贡献.

$$F = \frac{1}{2}\int d^d x \left[\mu^2\phi^2 + \gamma(\nabla\phi)^2\right]$$

其中 ϕ 在 $T<T_c$ 时理解为 $\tilde\phi = \phi - m_0$，忽略了4次方 ϕ^4. 此为高斯近似.

可求解，算出 $C \sim (T-T_c)^{-(2-\frac{d}{2})} \sim C_0 \xi^{4-d}$ $\qquad \xi = \left(\frac{\gamma}{\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\langle\phi(\vec{x})\,\phi(\vec{y})\rangle_c \sim \begin{cases} \dfrac{1}{r^{d-2}} & r \ll \xi \\ \dfrac{e^{-\frac{r}{\xi}}}{r^{\frac{d-1}{2}}} & r \gg \xi. \end{cases}$$

可解释. 有些实验比热发散. 指数 $\alpha = 2 - \frac{d}{2}$

$\xi = \left(\frac{\gamma}{\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sim (T-T_c)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2}$. $\qquad \langle\phi(\vec{x})\,\phi(\vec{y})\rangle \sim \dfrac{1}{r^{\boxed{d-2+\eta}}} \Rightarrow \eta = 0$.

在 $d=2,3$ 与实验不符, $d>4$ 与模拟相符.

§. 上临界维数.

下面我们来回答为什么高斯在高维成立，在低维不正确.

首先 关联函数反映了围绕 $\langle\phi(\vec{x})\rangle$ 的涨落.

我们给每个 block 标号 $i=1,2,\cdots,N$. 于是:

$$\langle m^2\rangle=\frac{1}{N^2}\langle\sum_i\phi(x_i)\sum_j\phi(x_j)\rangle=\frac{1}{N^2}\sum_i\sum_j\langle\phi(x_i)\phi(x_j)\rangle=\frac{1}{N^2}\sum_{ij}\left(m_0^2+\langle\phi(x_i)\phi(x_j)\rangle_c\right)$$

$$\langle m^2\rangle=m_0^2+\frac{1}{N^2}\sum_{ij}\langle\phi(x_i)\phi(x_j)\rangle_c$$

在 $T<T_c$ 时 高斯近似: $\phi(\vec{x})=m_0+\tilde{\phi}(\vec{x})$,

$\tilde{\phi}(\vec{x})$ 是 m_0 附近小的涨落 (偏离经典路径), $\Rightarrow$ $\frac{1}{N^2}\sum_{ij}\langle\phi(x_i)\phi(x_j)\rangle_c \ll m_0^2$

(写回积分) $\Rightarrow$ $R=\dfrac{\frac{1}{V}\int d^d x\,\langle\phi(x)\phi(0)\rangle_c}{\frac{1}{V}\int d^d x\, m_0^2}\ll 1$ (考虑了平移不变)

由于 在 $r\gg\xi$ 时涨落关联消失，积分积到 ξ 就可以了.

$$R=\frac{\int_0^\xi d^d x\,\langle\phi(\vec{x})\phi(0)\rangle_c}{\int_0^\xi d^d x\, m_0^2}\sim\frac{1}{m_0^2\xi^d}\int_0^\xi dr\,\frac{r^{d-1}}{r^{d-2}}\sim\frac{\xi^{2-d}}{m_0^2}\ll 1.$$

上式称为 Ginzburg criteria (判据)

麻烦来自: $T\to T_c$ 此时: $\xi\to\infty$, $m_0\to 0$

代入 $\xi\sim|T-T_c|^{-\frac{1}{2}}$, $m_0\sim|T-T_c|^{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ $R=|T-T_c|^{\frac{d-4}{2}}$.

我们发现: $d_c=4$ 非常特殊! d_c 称上临界维数.

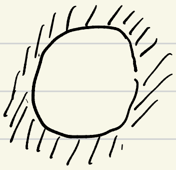
当 $d\geq d_c$, 高斯近似可靠, 自洽.

当 $d<d_c$ 高斯近似不自洽

§ 量纲分析 (dimensional analysis)

很多物理现象表现出 标度律(scaling). 简单说: 两个物理量 $A \sim B^P$ 幂律 (power law).
当 $B\to bB$, $A\to b^P A$.

例: 空窖辐射. $u = AT^4$



• 通常 标度律 或 power-law, 可以 通过 量纲分析 导出.

$[u] = \frac{E}{L^3}$, 相关物理量: 热平衡 $\to k_B T$, 辐射 $\to c$. 量子 $\to \hbar$.
$[k_BT]=E$, $[c]=\frac{L}{t}$, $[\hbar]=E\cdot t$

$$\frac{E}{L^3} = (k_BT)^{P_1}\, c^{P_2}\, \hbar^{P_3} = E^{P_1}\left(\frac{L}{t}\right)^{P_2}(Et)^{P_3}$$

$$\Rightarrow P_2=-3 \Rightarrow P_3=-3 \Rightarrow P_1=4. \quad \Rightarrow u = B\frac{k_B^4}{c^3\hbar^3}T^4$$

B 是常数, 严格计算 $\Rightarrow B=\frac{\pi^2}{15}$

再看一个例子: 浅水波的相速度 $v = (gh)^{\frac12}$. power law 严格理论: $v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \xrightarrow{\frac{h}{\lambda}\ll 1} gh$

量纲分析推导: v 应该与 g, 深度 h, 波长 λ, 密度 ρ 有关.

$[g]=\frac{L}{t^2}$, $[h]=[\lambda]=L$, $[\rho]=\frac{M}{L^3}$

设 $\frac{L}{t} = g^{P_1}h^{P_2}\lambda^{P_3}\rho^{P_4}$

一种可能: ① $P_1=\frac12$, $P_2=\frac12$, $P_4=0$. $v=(gh)^{\frac12}f\left(\frac{h}{\lambda}\right)$, f 是量纲分析无法确定的函数.

浅水极限 $\frac{h}{\lambda}\to 0$, $f(0)$ 无量纲常数. 回到 $\boxed{v=(gh)^{\frac12}}$ ← power law, or scaling law.

另一种可能: ② $P_1=\frac12$, $P_3=\frac12$, $P_4=0$ 也成立. $v=(g\lambda)^{\frac12}\tilde f\left(\frac{h}{\lambda}\right)$

浅 $\frac{h}{\lambda}\to 0$. 若 $\tilde f(0)$ 为无量纲常数, 难道 $v\propto(g\lambda)^{\frac12}$?

原因: 不是所有函数都可以写成 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots$ ← 解析的.

物理上 我们知道浅水波 v 与 λ 无关 ∴ $\boxed{\tilde f\left(\frac{h}{\lambda}\right) = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^{\frac12} f(x)}$ $\tilde f$ 非解析!

当 power 是分数的情况我们要小心!

我们回到路径积分 $Z=\int \mathcal{D}\phi\, e^{-\beta F}$,

$$定义\ S = \beta F[\phi] = \int d^d x\, [\frac{\beta a_2}{2}\phi^2 + \frac{\beta a_4}{4}\phi^4 + \frac{\beta\gamma}{2}(\nabla\phi)^2]$$

可以看到 S 无量纲, 记 $[S]=1$

定义 $\tilde{\phi}\equiv(\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}\phi$, 则 $\tilde{\phi}^2=\beta\gamma\phi^2$, $\beta a_2\phi^2=\frac{a_2}{\gamma}\tilde{\phi}^2$, 定义 $r_0=\frac{a_2}{\gamma}$

$\tilde{\phi}^4=\beta^2\gamma^2\phi^4$, $\beta a_4\phi^4=\frac{a_4}{\beta\gamma^2}\tilde{\phi}^4$, 定义 $u_0=\frac{a_4}{\beta\gamma^2}$

因此: $\boxed{S=\int d^dx\,[\frac{r_0}{2}\tilde{\phi}^2+\frac{1}{4}u_0\tilde{\phi}^4+\frac{1}{2}(\nabla\tilde{\phi})^2]}$ 下面,我来分析 S 中每一项的量纲.

$$[\int d^dx\,(\nabla\tilde{\phi})^2]=1 \Rightarrow L^d\ L^{-2}[\tilde{\phi}]=L^0 \Rightarrow [\tilde{\phi}]=L^{1-d/2}$$

$$[\int d^dx\, r_0\tilde{\phi}^2]=1=[\int d^dx\, u_0\tilde{\phi}^4] \Rightarrow [r_0]=L^{-2},\quad [u_0]=L^{d-4}$$

我们知道 $a_2\sim T-T_c$, 在高斯近似下 $T-T_c\propto\xi^{-2}$, 与 $[r_0]=L^{-2}$ 相符.

$[r_0]=L^{-2}$ 表明 $r_0^{-\frac{1}{2}}$ 是个长度尺度(scale), 用 $r_0^{-\frac{1}{2}}$ 度量 = 用 ξ 作为单位度量长度.

定义无量纲量是方便的: (或 $r_0=L_0^{-2}$)

设 $L_0\equiv r_0^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad \varphi\equiv\frac{\tilde{\phi}}{L_0^{1-d/2}}$, $\qquad \vec{r}\equiv\frac{\vec{x}}{L_0}$, $\qquad \bar{u}_0\equiv\frac{u_0}{L_0^{d-4}}$

于是 $Z=\int\mathcal{D}\varphi\ e^{-S}$ 其中 $S=S_0+S_{int}$ ①

其中: $S_0=\int d^dr\,[\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2+\frac{1}{2}\varphi^2]$, $S_{int}=\int d^dr\,\frac{1}{4}\bar{u}_0\varphi^4$

- 若 $S_{int}=0$, ①可以高斯积分.
- $S_{int}\neq0$, 对 $\bar{u}_0$ 作微扰: $Z=\int\mathcal{D}\varphi\ e^{-S_0}(1-S_{int}+\frac{1}{2!}(S_{int})^2+\cdots)$

Z 依赖于无量纲参数 $\bar{u}_0$:

$$\bar{u}_0=u_0 r_0^{-(4-d)/2}=u_0\left(\frac{a_2'}{\gamma}\right)^{\frac{d-4}{2}}\cdot t^{\frac{d-4}{2}} \qquad (设\ a_2=a_2'(T-T_c)=a_2' t)$$

当 $t\to0$, $d<4$, $\bar{u}_0\to\infty$! 微扰无效,产生 差化 Ginzburg 判据 结论

$d>4$, $\bar{u}_0\to0$ 高斯 MF 准确!