第十三讲

• 临界指数的量纲分析

$$S = \beta F[\phi] = \int d^d x \left[\frac{\beta a_2}{2}\phi^2 + \frac{\beta a_4}{4}\phi^4 + \frac{\beta\gamma}{2}(\nabla\phi)^2\right]$$

因为 $[\phi] = \frac{[\mu_B]}{L^d}$，$[\beta] = \frac{1}{E}$ $\Rightarrow [\gamma] = \frac{E L^2 \cdot L^d}{[\mu_B]^2}$，$[\beta\gamma] = \frac{L^{2+d}}{[\mu_B]^2}$ 保证了 $[\int d^d x\, \beta\gamma(\nabla\phi)^2] = 1$

$$[a_2] = \frac{E L^d}{[\mu_B]^2}, \quad [a_4] = \frac{E L^{3d}}{[\mu_B]^4}$$

我们选择定义 $\tilde{\phi} = (\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}\phi$，简化问题避免讨论 γ, a_2, a_4 中 E, μ_B 量纲.

$$[\tilde{\phi}] = L^{\frac{2-d}{2}}$$

导出：$$S = \int d^d x \left[\frac{r_0}{2}\tilde{\phi}^2 + \frac{1}{4}u_0\tilde{\phi}^4 + \frac{1}{2}(\nabla\tilde{\phi})^2\right]$$

其中 $r_0 \equiv \frac{a_2}{\gamma}$，$u_0 = \frac{a_4}{\beta\gamma^2}$，并且 $[r_0] = L^{-2}$，$[u_0] = L^{d-4}$，L 是唯一保留的量纲.

我们来看关联函数，用量纲分析：

$[\langle\tilde{\phi}(\vec{x})\tilde{\phi}(\vec{y})\rangle] = [\tilde{\phi}]^2 = L^{2-d}$，假定与 $r = |\vec{x}-\vec{y}|$ 符合 power law

则推出：$\langle\tilde{\phi}(\vec{x})\tilde{\phi}(\vec{y})\rangle = \frac{A}{r^{2-d}}$，　$[A] = 1$ 无量纲常数.

另一方面：$$\langle\tilde{\phi}(\vec{r})\tilde{\phi}(\vec{r}')\rangle = \frac{\int D\tilde{\phi}\, e^{-S}\tilde{\phi}(r)\tilde{\phi}(r')}{\int D\tilde{\phi}\, e^{-S}} = \beta\gamma\langle\phi(\vec{r})\phi(\vec{r}')\rangle$$

当 $r \ll \xi$ 我们知道 $\langle\phi(\vec{x})\phi(\vec{y})\rangle = \frac{D}{r^{d-2}}$ $\Rightarrow$ power law 下量纲分析不确!

[不作 rescale 也可以：$[\langle\phi(\vec{x})\phi(\vec{y})\rangle] = \frac{[\mu_B]^2}{L^{2d}} = \frac{[\mu_B]^2}{L^{2+d}} \cdot L^{2-d}$ $\Rightarrow [\langle\phi(\vec{x})\phi(\vec{y})\rangle] = \frac{1}{[\beta\gamma]} \cdot L^{2-d}$

由于 $\beta\gamma$ 是系统参数，与 $|\vec{x}-\vec{y}|$ 无关，再假定 $\langle\phi(\vec{x})\phi(\vec{y})\rangle$ 与 r power law

同样可导出 $\langle\phi(\vec{x})\phi(\vec{y})\rangle = \frac{D}{r^{d-2}}$，$D$ 为常数，$[D] = \frac{1}{[\beta\gamma]}$]

回顾：$\langle\phi(\vec{x})\phi(\vec{y})\rangle = \frac{\gamma}{\beta\gamma}G(\vec{x},\vec{y})$　其中　$G(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{\gamma}\int\frac{d^d k}{(2\pi)^d}\frac{e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{k^2+\frac{1}{\xi^2}}$，

对 G 作量纲分析 $\Rightarrow [\gamma G] = L^{2-d}$　直接计算：在 $r \ll \xi$ 时，$\gamma G \propto r^{2-d}$

同样得到：$[\gamma G] = [\beta\gamma\langle\phi(\vec{x})\phi(\vec{y})\rangle] = [\langle\tilde{\phi}(\vec{x})\tilde{\phi}(\vec{y})\rangle] = L^{2-d}$

实验上观测的是 $G(\vec{x})$ 的傅立叶变换：

$$G(\vec{k}) = \int \langle \tilde{\phi}(\vec{r})\tilde{\phi}(0)\rangle e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{r} \qquad \text{（平移不变）}$$

$$[G(\vec{k})] = L^d \cdot L^{2-d} = L^2$$

- 有量纲物理量，改变 unit（单位），数值会变. 物理量 $Q_p = Q \cdot Q_0$，Q_0 是单位 (unit)，Q 是数.

假设我们改变单位 $L_0 \to L_0' = b L_0$，那么 $L' \cdot bL_0 = L \cdot L_0 \Rightarrow \boxed{L' = \frac{1}{b} L}$

同理：由于 $G' \cdot (bL_0)^2 = G L_0^2 \Rightarrow \boxed{G'(\vec{k}') = b^{-2} G(\vec{k})}$ (1)

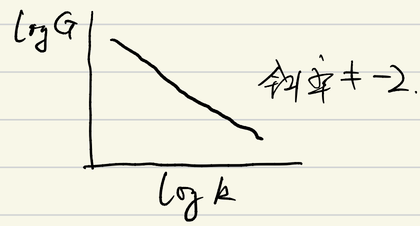
其中：$\boxed{\vec{k}' = b\vec{k}}$ 因为 $[k] = L^{-1}$，$\Rightarrow k' \cdot \frac{1}{bL_0} = k \frac{1}{L_0}$

我们引入一个新概念：标度维数 (scaling dimension)

$G(k)$ 的标度维数为"-2"，L 的标度维数为"-1"，k 的 scaling dim $= 1$

$\Delta_G = -2$，$\Delta_L = -1$，$\Delta_k = 1$

然而在 T_c，我们知道 from 实验（中子散射）



$$G(k) \propto k^{-2+\eta}$$

即标度变换关系为 $\boxed{G'(k') = b^{-2+\eta} G(k)}$ (2)

η 是一个 anomalous dimension !

(1) 与 (2) 孰对孰错？

再考虑关联长度 ξ

$[\xi]=L$，而 $[r_0]=L^{-2}$，假设 power law $\Rightarrow \xi = A\cdot r_0^{-\frac{1}{2}}$，A无量纲常数.

又 $r_0=\frac{a_2}{\gamma}=\frac{a_2'}{\gamma}(T-T_c)$　　因此 $\xi = A'(T-T_c)^{-\frac{1}{2}}$，$A'=A\left(\frac{\gamma}{a_2'}\right)^{\frac{1}{2}}$，$[A']=L\,\theta^{\frac{1}{2}}$

$\xRightarrow{\text{量纲分析}}$ $\nu=\frac{1}{2}$　　符合高斯平均场（近似）：$\xi^2=\frac{\gamma}{a_2}$，

但我们知一般 $\nu\neq\frac{1}{2}$：（从实验，模拟，可解体）

这是临界现象的最神秘的地方！　量纲分析失败！

答案是：

$$\boxed{G(k,T_c)\propto a^{\eta}k^{-2+\eta}} \qquad (3)$$

a是晶格常数.（或 $a=\frac{1}{\Lambda}$，分辨率，cut-off）

一定有另外一个长度尺度（除 $r_0^{-\frac{1}{2}}$ 之外）进入量纲分析，这尺度是微观尺度 $\frac{1}{\Lambda}$

(3)式的标度变换为（改变单位）：

$$G'(k',T_c)=b^{-\eta}b^{-2+\eta}a^{\eta}k^{-2+\eta}=b^{-2}G(k,T_c)$$

固定k，改变a，$G\sim a^{\eta}$；　固定a，改变k，$G\sim k^{-2+\eta}$

再来看对 ξ 的量纲分析：加上 $[a]=L$，两个长度量 $r_0^{-\frac{1}{2}}$ 与a的量纲分析：

$$\xi = r_0^{-\frac{1}{2}}f(r_0a^2) \qquad \leftarrow [r_0a^2]=L^0$$

当 $T\to T_c$，$r_0a^2\to 0$　如果当 $x\to 0$，$f(x)\propto x^{\theta}$，　θ 为未知非整数.

则　$\xi\propto r_0^{-\frac{1}{2}+\theta}a^{2\theta}\sim t^{-\frac{1}{2}+\theta}$

这样　$\nu=\frac{1}{2}-\theta$

量纲分析得以成立！　$\boxed{\text{θ也是一个 anomalous dimension！}}$

一般人们认为，在T_c附近，$\xi \gg a$，可以忽略微观细节a，将$\frac{a}{\xi}$代为0，$f(\frac{a}{\xi})$为常数。

后果是平均场或简单量纲分析的结果。

然而前面的分析表明这是不对的，不能简单把$f(a/\xi) \longrightarrow f(0)$，

或者说不能简单认为"在临界点附近，唯一重要的长度尺度是关联长度"。

正是"借助于"微观尺度$\frac{1}{\Lambda}$，我们才"造出"了 anomalous dimension.

参考：N. Goldenfeld. Lectures on phase transitions and the renormalization group.

数学上：　当$x = \frac{a}{\xi}$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$

当$f(x)$非奇异，比如$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum\limits_{n=0} a_n x^n$，　我们可以说

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = a_0$$

当$f(x)$奇异，　结论是：　$\lim\limits_{x\to 0} f(x) \propto x^{-\sigma} \phi(x)$，　$\phi(x)$ regular at $x \to 0$

• 标度理论

标度假设: 临界性质由 T_c 附近 $\xi/a = \xi(t)$ 发散决定!

标度变换: 长度单位由 $L_0 \to L_0' = bL_0$, $b>1$ 称为标度因子 (scaling factor)

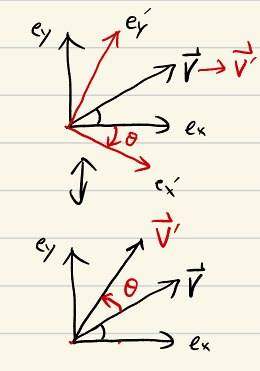
$$\xi L_0 = \xi'(bL_0) \longrightarrow \xi' = \xi/b \qquad \text{标度维数}\ \Delta_\xi = -1$$

$$\Delta x\, L_0 = \Delta x'(bL_0) \longrightarrow \Delta x' = \frac{\Delta x}{b} \qquad \Delta_{\Delta x} = -1$$

$$k\, L_0^{-1} = k'(bL_0)^{-1} \longrightarrow k' = b\cdot k \qquad \Delta_k = 1$$

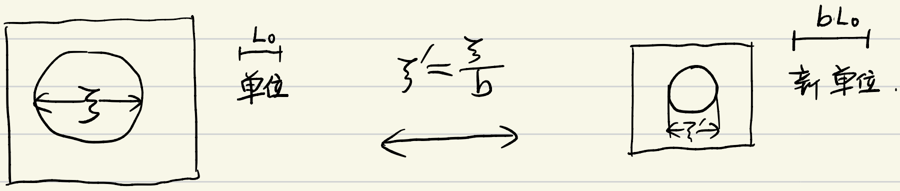
在新的单位下, 长度值缩小为 $\frac{1}{b}$, 波矢 k 放大为 b 倍,

类似于在一个新的坐标系里 看 原来的矢量: $\vec{v} \to \vec{v}' = R(\theta)\vec{v}$



主动与被动语言

等价于 坐标系不变, 旋转矢量



则 所有物理量都随之改变: 缩放, 称为 scaling

$$A \longrightarrow A' = b^{\Delta_A} A \qquad \Delta_A \text{ 就是 } A \text{ 的 scaling dimension}$$

例如:

(1) $V = L^d \longrightarrow V' = b^{-d} L^d = b^{-d} V \qquad \therefore \Delta_V = -d$

(2) 约化温度 $t = T-T_c$: 由于存在比例关系 $\xi = A(T-T_c)^{-\nu}$

(也可定义为 $\frac{T-T_c}{T_c} = t$)   • A 为有量纲常数 但 A 与长度单位 a 无关.

⇒ 新单位下: $t' = (\xi b^{-1})^{-\frac{1}{\nu}} = b^{\frac{1}{\nu}} t$, $\therefore \Delta_t = \frac{1}{\nu}$, 通常习惯用 $\Delta_t = y_t$

(3) $G'(k') = b^{-2+\eta}\, G(k) \Rightarrow \Delta_G = -2+\eta$. (需要保持 $\frac{1}{\Lambda}$ 不变!)

由于 $G(\vec{k}) = \int \langle \tilde{\phi}(\vec{r})\tilde{\phi}(0)\rangle e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{r}$

设 $\tilde{\phi}(\vec{r}) \xrightarrow{\text{单位}L_0\to bL_0} \tilde{\phi}'(\vec{r}') = b^x \tilde{\phi}(\vec{r})$ 代入上式.

$$2x - d = -2+\eta \Rightarrow x = \frac{d-2+\eta}{2} \quad \text{即}\ \Delta_{\tilde{\phi}} = \frac{1}{2}(d-2+\eta)$$

(4) 总的磁场能 $\tilde{h}\tilde{\Phi}L^d$ 不随尺度单位变化 （注意：$\beta\int B\phi(\vec{x})d^dx = \int\tilde{h}\tilde{\Phi}(\vec{x})d^dx$，）

$\tilde{h}=B\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \leftarrow$ rescaled B. $\overset{\text{量纲分析}}{\Rightarrow}$ $[\tilde{h}]=-1-\frac{d}{2}$

设 $\Delta_{\tilde{h}}=Y$，

$$h'\tilde{\Phi}'L'^d = h\tilde{\Phi}L^d \Rightarrow L^Y h L^X\tilde{\Phi}\, b^{-d}L^d = h\tilde{\Phi}L^d \Rightarrow Y=d-X=\frac{d+2-y}{2}$$

即 $\Delta_{\tilde{h}}=\frac{d+2-y}{2}$， 习惯记号 Y_h

同样 fL^d 是总自由能 F_{thermo}，$[F_{thermo}]$ 与 L 无关，应该 标度不变（与长度单位 a 无关）

$$f'L'^d = b^{\Delta_f}f\cdot b^{-d}L^d = fL^d \Rightarrow \Delta_f = d$$

也就是说存在以下的比例关系：

$$t\propto\xi^{-Y_t},\quad \tilde{h}\propto\xi^{-Y_h},\quad f\propto\xi^{-d},\quad \tilde{\Phi}\sim\xi^{Y_h-d}\sim\xi^{-Y_t}$$

并直接导出标度律：

$$\left.\begin{aligned} m&\propto t^{\beta}\sim\xi^{-\frac{\beta}{\nu}}\\ m&\propto\xi^{-\Delta_m}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{\beta=\nu\Delta_m=\frac{\nu}{2}(d-2+y)}$$

$\leftarrow$ 利用 $m=\langle\phi\rangle$ 正比于 $\langle\tilde{\Phi}\rangle$

$\therefore\ \Delta_m=\Delta_{\tilde{\Phi}}$

$$\left.\begin{aligned} f&\sim\xi^{-d}\\ t&\sim\xi^{-Y_t}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial T}=\frac{\partial}{\partial(T-T_c)}\\ &c=-T\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}\sim\xi^{-(d-2Y_t)}\\ &c\sim t^{-\alpha}\end{aligned}\right\}\ \boxed{\alpha=2-\frac{d}{Y_t}=2-\nu d}$$

$$\left.\begin{aligned} &\chi=\frac{dm}{d\tilde{h}}\propto\xi^{-\Delta_m+\Delta_{\tilde{h}}}=\xi^{d-2\Delta_m}=\xi^{2-y}\\ &\chi\propto t^{-\gamma}\end{aligned}\right\}\ \gamma=\nu(2-y)$$

$$m\propto\tilde{h}^{\frac{1}{\delta}} \Rightarrow \xi^{-\Delta_m}\propto\xi^{-\Delta_{\tilde{h}}/\delta} \Rightarrow \delta=\frac{\Delta_{\tilde{h}}}{\Delta_m}=\frac{d+2-y}{d-2+y}$$

所有指数都可用 ν 与 y 表出，或 Y_t 与 Y_h 表出！