- RG的定义　　(The Big Idea)

以下采用 rescaled $\phi(\vec{x})$ 场和相应的作用量.（简写为 $\phi(x)$，$S[\phi]$ 写成 $F[\phi]$）

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-F[\phi]} \qquad (1)$$

$$\text{其中 } F[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} r_0 \phi^2 + g\phi^4 + \cdots\right] \qquad (2)$$

$[\phi] = L^{1-\frac{d}{2}}$　　（u_0 写成 g，与 Tong 的记号一致，保留 r_0，对应 Tong 的 μ^2）

- (2) 中 "…" 可以包含如 ϕ^6，$(\nabla^2\phi)^2$，乃至 $\phi^{147}(\nabla\phi)^2\nabla^2\phi$ 等等. 只要满足 Z_2 对称性：$\phi \to -\phi$，$F[\phi]$ 不变

- F 是 ϕ 的解析函数的积分. ⟶ 不能有 ϕ^{-2}，$\phi^{\frac{1}{2}}$，……

- (2) 式中的参数是无穷多的.　　参数空间 $\vec{\mu} = (r_0, g, \cdots\cdots)$　　原则上无穷维.

- $\phi(\vec{x})$ 场的空间分辨率 a（粗粒化的一个宏观尺寸，大于晶格长度的一个尺度，前面用 ba）

对应一个波矢 $\Lambda = \frac{1}{a}$，称为 UV cut-off（紫外截断）

$$\phi(\vec{x}) = \int^{\Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \phi_{\vec{k}} \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}} \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \qquad \vec{k} = \frac{2\pi}{L}\vec{n}, \quad 0 < |k| < \Lambda$$

从量纲分析我们已经看到 a 的重要性. 没有它的介入就不能理解 y 与 θ 两个 anomalous dimension 的存在!

$G(k) \sim a^y \, k^{-2+y}$，　$[G(k)] = L^2 \leftarrow$ 截面

标度分析 $L_0 \to bL_0$，a 不能变. $G'(k) = a^y \, b^{-2+y} \, k^{-2+y} \longrightarrow \Delta_G = -2+y \xrightarrow{\text{进一步}} \Delta_\phi = \frac{d-2+y}{2}$

否则 $G' = b^{-y} \, b^{-2+y} \, G = b^{-2} \, G \longrightarrow$ 错误的 $\Delta_G = -2$.

$\xi = A r_0^{-\frac{1}{2}} f(r_0 a^2) \Rightarrow \xi = A r_0^{-\frac{1}{2}+\theta} \, a^{2\theta} \sim t^{-\nu}$，　$\nu = \frac{1}{2} - \theta \xrightarrow{L_0 \to bL_0} \Delta_t = \frac{1}{\nu}$

也必须有 a，否则 $\xi \propto t^{-\frac{1}{2}}$，$\Rightarrow t \propto \xi^{-2}$，$\xrightarrow{L_0 \to bL_0} t' = b^2 t \Rightarrow \Delta_t = 1/\nu = 2$

通常人们不会相信 a 与 ξ 同时起作用（第一讲，scale 差太远了）. 但是在临界现象中. 必须考虑所有尺度的涨落.　　否则没有 y 与 θ.

标度理论：承认 θ 与 y 的存在，默认了 a 的存在，且不变. 根据 ξ 与各个物理量的 power law 关系，

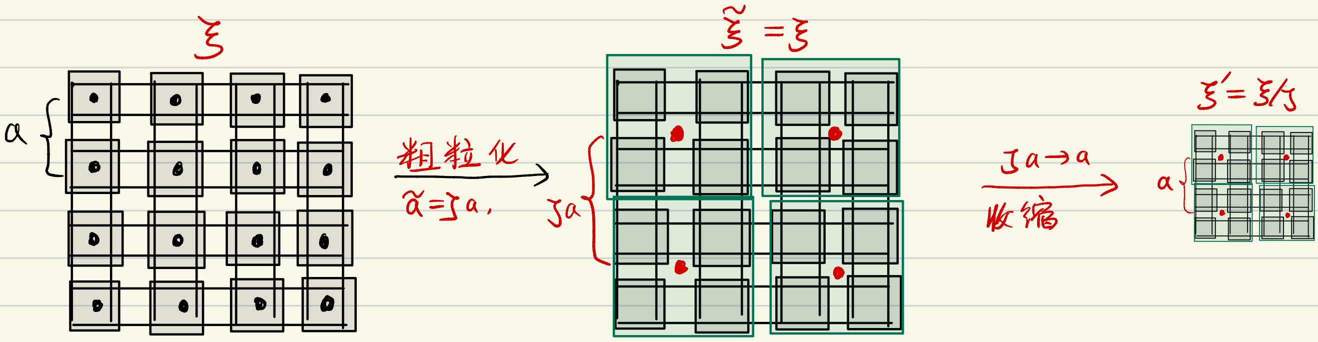
利用标度变换给出了很多重要结果，特别是标度律 scaling law，建立了临界指数之间的关系

但是它是不严谨的，有"人为"的味道：当长度的单位变化了，所有的长度，不论长短都应该相应变化（缩放），包括 a.

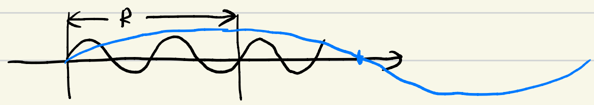
能不能直接计算 θ 与 y？　怎样才能保证 a 不变的前提下，缩放系统？

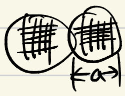
实现这一目标的方法：重正化变换（RG）

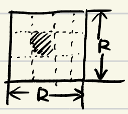
这个变换分两步：1. 粗粒化. 2. rescale 即标度变换.



• 首先是粗粒化：改变 block 的 size



$\phi(x)$ 定义在 block spin 基础上.  $a=\frac{1}{\Lambda}$.



小于R的变化都平均掉 $\lambda<R$.

由于我们只关心长距离(大尺度)的物理量，假设这个尺度是R.

如果把 box size 从 $a \longrightarrow \zeta a$ $(\zeta>1)$，等价于 $\Lambda\to\Lambda'=\frac{\Lambda}{\zeta}$ 不会影响结果，只要 $\zeta a \ll R$，或 $\Lambda' \gg \frac{1}{R}$

把 $\phi(x)$ 场的分辨率由 $a \longrightarrow a'=\zeta a$ 的过程. 称为 Kadanoff 变换.

开工之前，我们来复习概率理论的一个规则：考虑两个随机变量 q_1, q_2

$Z=\int dq_1 dq_2\, W(q_1,q_2)$, $P(q_1,q_2)=\frac{W(q_1,q_2)}{Z}$, 我们想计算 $A(q_1)$ 的期望值 $\langle A\rangle$

$$\langle A\rangle_P=\int dq_1 dq_2\, A(q_1)\, P(q_1,q_2) = \int dq_1 dq_2\, A(q_1)\frac{W(q_1,q_2)}{Z}$$

$$=\int dq_1\, A(q_1)\frac{W'(q_1)}{Z}=\int dq_1\, A(q_1)\,P'(q_1)=\langle A\rangle_{P'}$$

其中：$W'(q_1)=\int dq_2\, W(q_1,q_2)$, $Z=\int dq_1\, W'(q_1)=\int dq_1 dq_2\, W(q_1,q_2)$ 不变.

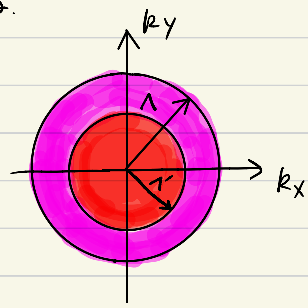
计算 $\langle A\rangle$ 只需：$P'(q_1)=\frac{W'(q_1)}{Z}$.

在动量空间(傅立叶)完成 $a\to a'=\zeta a$ 就是积掉 $\phi_{k>\Lambda'}$, $\Lambda'=\frac{\Lambda}{\zeta}$.

首先将 $\phi_{\vec k}$ 改写成

$$\phi_{\vec k} = \phi_{\vec k}^- + \phi_{\vec k}^+$$

注：$\phi_{\vec k}^-$ 与 $\phi_{\vec k}^+$ 是函数，不是把 $\phi_{\vec k}$ 分成两个数.



其中 $\phi_{\vec k}^-$ 描述长波涨落（大尺度的变化）：
infra-red 重要

$\phi_{\vec k}^+$ 描述短波（小尺度变化）
ultra-violet 不重要

$$\phi^-_{\vec k} = \begin{cases} \phi_{\vec k} & 当\ k<\Lambda' \\ 0 & 当\ k>\Lambda' \end{cases}$$

$$\phi^+_{\vec k} = \begin{cases} \phi_k & 当\ \Lambda'<k<\Lambda \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

将 $F[\phi_{\vec k}]$ 改写成 $\phi^+_{\vec k}$ 与 $\phi^-_{\vec k}$ 的泛函.

$$F[\phi_{\vec k}] = F_0[\phi^-_{\vec k}] + F_0[\phi^+_{\vec k}] + \underset{\uparrow\ \text{混合项}}{F_I}[\phi^-_{\vec k}, \phi^+_{\vec k}]$$

$$Z = \int \prod_{k<\Lambda} d\phi_{\vec k}\, e^{-F} = \int \prod_{k<\Lambda'} d\phi^-_{\vec k}\, e^{-F_0[\phi^-_{\vec k}]} \int \prod_{\Lambda'<k<\Lambda} d\phi^+_{\vec k}\, e^{-F_0[\phi^+_{\vec k}] - F_I[\phi^-_{\vec k}, \phi^+_{\vec k}]}$$

希望将它写成下面形式.

$$Z = \int \mathcal{D}\phi^- \, e^{-F'[\phi^-]}, \qquad \mathcal{D}\phi^- \equiv \prod_{k<\Lambda'} d\phi^-_{\vec k}$$

其中 $F'[\phi^-]$ 称为 Wilsonian effective free energy. 或 wilsonian effective action. 描述分辨率降至 $\frac{1}{\Lambda'}$ 的情形.

但不改变大尺度 $R\gg\frac{1}{\Lambda'}$ 的物理量的计算. （物理量 A 只由 $\phi^-_{\vec k}$ 决定），$F'[\phi^-]$ 由下式给出:

$$\boxed{e^{-F'[\phi^-]} = e^{-F_0[\phi^-_{\vec k}]} \int \prod_{\Lambda'<k<\Lambda} d\phi^+_{\vec k}\ e^{-F_0[\phi^+_{\vec k}]}\, e^{-F_I[\phi^-_{\vec k}, \phi^+_{\vec k}]}}$$

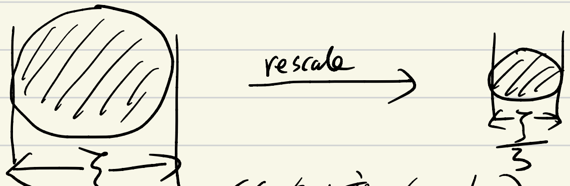
$F'[\phi^-]$ 应该也可以写成 $F[\phi]$ 的形式:

$$F'[\phi^-] = \int d^dx \left[\frac{1}{2}\gamma' \nabla\phi^- \cdot \nabla\phi^- + \frac{1}{2} r_0' \phi^{-2} + g' \phi^{-4} + \cdots \right]$$

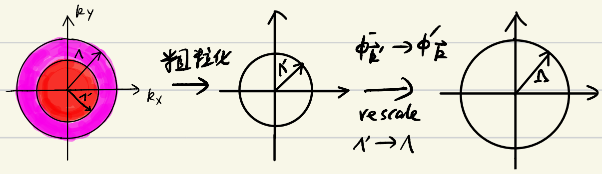
因为 $F[\phi]$ 的形式是极其普遍的.（只受 Z_2 对称性限制，而粗粒化过程不改变 Z_2 对称性）

现在可以完成真正的保证 a 不变的标度变换了.

第二步: rescale (标度变换, 用 ξL_0 作 unit, 等价于收缩系统到 $\frac{1}{\xi}$)



所有尺度 (scale)



$$\boxed{\vec{k}'=\xi\vec{k}\,,\qquad \vec{x}'=\xi^{-1}\vec{x}}$$

这样 $\boxed{\Lambda'\longrightarrow\Lambda=\xi\Lambda'}$ 回到粗粒化之前.

$\xi a\to a$

取: $\boxed{\phi'(\vec{x}')=\xi^{-w}\sqrt{\gamma'}\,\phi^-(\vec{x})}$, $\int d^dx\,\gamma'\nabla\phi^-\cdot\nabla\phi^- = \int d^dx'\,\xi^{d-2+2w}\nabla_{x'}\phi'(x')\cdot\nabla_{x'}\phi'(x')$,

要求系数为1, $\Rightarrow w=1-\frac{d}{2}$, $-w$ 是 ϕ 的标度维数 $(y=0)$

- 如果 γ' 是常数, 将 $\sqrt{\gamma'}$ 收缩到 ϕ' 中, 类似于定义 $\tilde{\phi}=\sqrt{\gamma}\phi$, 不重要, ϕ 在 Z 中被积分掉.
- 如果 γ' 中含截断 Λ, 要考虑 $\sqrt{\gamma'}\longrightarrow\xi^{\frac{y}{2}}\sqrt{\gamma'}$, such that $-w=\frac{d-2+y}{2}$ 为 ϕ 的标度维数.

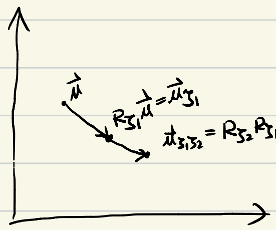
类似地: $\int d^dx\,r(\phi^-)^2=\int d^dx'\,r_0(\xi)\,\phi'^2$, $r_0(\xi)=\frac{r'\xi^{d+2w}}{\gamma'}=\frac{r'\xi}{\gamma'}$; $\int d^dx\,g(\phi^-)^4=\int d^dx'\,g(\xi)\,\phi'^4$, $g(\xi)=\frac{g'}{\gamma'^2}\xi^{4-2d}$

($y=0$ 的情形)

这样 $F[\phi]=\int d^dx\left[\frac{1}{2}\gamma'\nabla\phi^-\cdot\nabla\phi^-+\frac{1}{2}r_0'\,\phi^{-2}+g'\phi^{-4}+\cdots\right]$

$$\Downarrow$$

$F_\xi[\phi']=\int d^dx'\left[\frac{1}{2}\nabla\phi'(x')\cdot\nabla\phi'(x')+\frac{1}{2}r_0(\xi)\,\phi'^2(x')+g(\xi)\,\phi'^4(x')+\cdots\right]$



定义了映射. $\vec{\mu}(\xi)=(1,r_0(\xi),g(\xi),\cdots)=R_\xi\vec{\mu}$

$\vec{\mu}'=R_\xi\vec{\mu}$ 称为 beta functions 给出 RG 流 (flow)

反映在保证 Λ 不变的条件下, 关联长度 ξ 的系统与关联长度为 ξ/ξ 的系统参数的关系.

通常说: 不同尺度下观察系统参数的变化方式. zoom-in 与 zoom out
a, ba.

- 满足 $R_{\xi_1}R_{\xi_2}=R_{\xi_1\xi_2}$ 但是没有 R_ξ^{-1}, 因此应该称为 semi-group

§高斯不动点

考虑 $\vec{u}(0) = (1, r_0, 0, 0, \cdots)$

$$F_0[\phi] = \int d^dx \left[\frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi + \frac{1}{2} r_0 \phi^2\right] = \int^{\Lambda} \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \ \frac{1}{2}(k^2 + r_0^2)|\phi_k|^2$$

可以直接写成： $F_0[\phi] = F_0[\phi^-] + F_0[\phi^+]$

$$\because \ Z = \int \prod_{k<\Lambda} d\phi_k \, e^{-F} = \int \prod_{k<\Lambda'} d\phi_k^- \, e^{-F_0[\phi_k^-]} \underbrace{\left[\int \prod_{\Lambda'<k<\Lambda} d\phi_k^+ \, e^{-F_0[\phi_k^+]}\right]}_{N} = \int \mathcal{D}\phi^- \, e^{-F'[\phi^-]}$$

$$\therefore \ e^{-F'[\phi^-]} = N e^{-F_0[\phi^-]}, \quad N \text{是常数.}$$

- rescale: $\vec{k} \to \vec{k}' = \zeta\vec{k}$, $\phi_{\vec{k}}^- \to \phi_{\vec{k}'}^{-\prime} = \zeta^{-\omega}\phi_{\vec{k}}^-$ (ω待定.) (保证 $\gamma' \to 1$)

$$F_0[\phi^-] = \int_0^{\Lambda/\zeta} \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \ \frac{1}{2}(k^2 + r_0^2)\phi_{\vec{k}}^-\phi_{-\vec{k}}^- = \int^{\Lambda} \frac{d^dk'}{(2\pi)^d} \frac{1}{\zeta^d 2}\left(\frac{k'^2}{\zeta^2} + r_0\right)\zeta^{2\omega}\phi_{\vec{k}'}^{-\prime}\phi_{-\vec{k}'}^{-\prime}$$

$\gamma' \to 1 \Rightarrow 2\omega - 2 - d = 0 \Rightarrow \omega = \frac{d+2}{2} = 1 + \frac{d}{2}$. ($-\omega$ 是 $\Delta\phi_k$，当 $\eta=0$)

$$\left[\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{d-2+\eta}{2} \\ \Delta\phi_k &= \Delta\phi - d = \frac{-d-2+\eta}{2} \end{aligned}\right]$$

$$\Rightarrow F_\zeta[\phi] = \int_0^{\Lambda} \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \ \frac{1}{2}(k^2 + r_0(\zeta))\phi_k\phi_{-k}$$

其中： $\boxed{r_0(\zeta) = r_0\zeta^{2\omega-d} = \zeta^2 r_0}$

由于 $\frac{1}{r_0} \sim \zeta^2 \Rightarrow \xi' = \xi/\zeta$ 关联长度收缩至 $\frac{1}{\zeta}$.

而不动点 fixed point 指 $\vec{u}^* = R_\zeta \vec{u}^*$

由： $\frac{d\, r_0(\zeta)}{d\zeta} = 0$, $\Rightarrow 2\zeta r_0 = 0$. $\Rightarrow r_0 = \infty$ or $r_0 = 0$. 两个不动点

对应： $\xi = 0$, or $\xi = \infty$

称为 Gaussian fixed point.