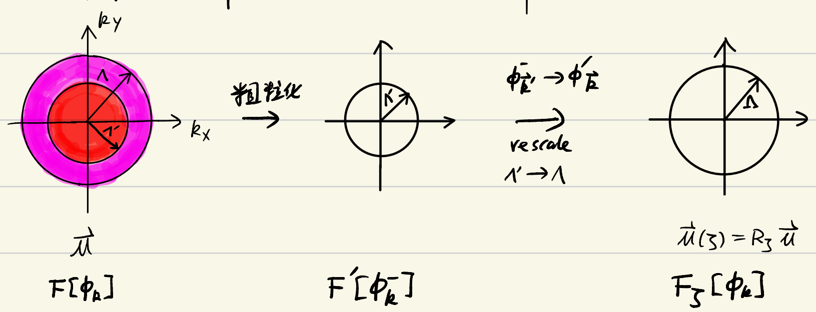
第十五讲

§ 不动点(fixed point)及其近邻

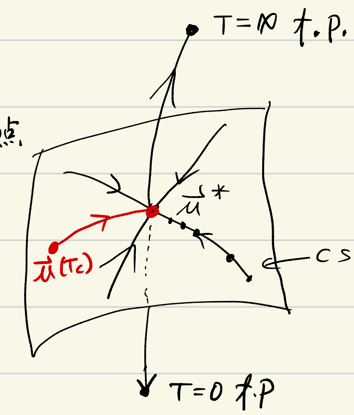


设系统处于理论空间 $\vec{\mu}$ 中一点，分辨率 Λ，我们不关心细节，因此积掉短波，

再 rescale 回保证 Λ 不变，这样就定义了重正化变换 $\vec{\mu}(\zeta) = R_\zeta \vec{\mu} \longrightarrow$ beta functions 给出 RG 流(flow)

反映在保证 Λ 不变的条件下，关联长度 ξ 的系统与关联长度为 ξ/ζ 的系统的参数的关系

如此下去，结果会怎样？ 两种可能：



1. 流向无穷远处。 2. 流到一个不动点(fixed point)：在RG变换下不变的点

$\boxed{R_\zeta \vec{\mu}^* = \vec{\mu}^*}$， 则 $\vec{\mu}^*$ 称为 fixed point，不动点

这意味着变换前后系统用同样的参数描述，然而

$$\xi \xrightarrow{RG} \xi' = \xi/\zeta$$

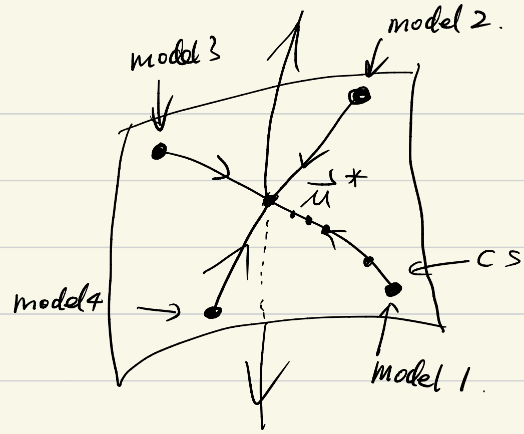
由于 $\vec{\mu}$ 决定了 ξ，因此 $\xi^* = \xi^*/\zeta \Rightarrow$ 在不动点 $\xi = 0$ or $\xi = \infty$.

- 当 $T > T_c$，ξ 有限，每一步 RG，$\xi \to \frac{\xi}{\zeta}$，最终 $\xi = 0$ 不变。流向 $T = \infty$ 不动点

- 当 $T < T_c$，ξ 仍是有限，每一步 RG $\xi \to \frac{\xi}{\zeta}$ 同样 $\to \xi = 0$，对应 $T = 0$ 不动点。

- 我们知道在 T_c，ξ 无穷大，$\xi' = \frac{\xi}{\zeta} = \xi$。 Zoom in 与 Zoom out 一样，自相似，或 scale invariant，标度不变。

因此临界点一定与 $\vec{\mu}^*$ 有关，然而还有一点要注意



• 存在一个"子空间，其所有点 $\vec{\mu}$: $\boxed{\lim_{\xi\to\infty} R_\xi \vec{\mu} = \vec{\mu}^*}$

称为: $\vec{\mu}^*$ 的临界面. (critical surface)

例如: 给定 T, B, 也就知道 $\vec{\mu}=(r_0, g, h, \cdots)$, 记作 $\vec{\mu}(T,B)$. (h 来自 $\int dx\, h\phi$)

RG 与临界现象的基本假定. $\vec{\mu}(T_c, 0)$ 在不动点 $\vec{\mu}^*$ 的临界面上, 因此

$\boxed{\lim_{\xi\to\infty} R_\xi \vec{\mu}(T_c,0) = \vec{\mu}^*}$ $\longrightarrow$ 临界系统经足够多次RG后到达不动点 $\vec{\mu}^*$

$\vec{\mu}^*$ 决定的 $F^*[\phi]$ 给出大尺度行为

• 临界点或不动点 $\vec{\mu}^*$ ($\xi=\infty$) 的代名词, 不准确.

• 当 $T\neq T_c$ 或 $h\neq 0$ 时, $\vec{\mu}(T,h)$ 不在 critical surface 上

• $\vec{\mu}$ 空间里 很多点(区域)最终流向同一个不动点: 这是普适性的起源.

即: 不同的微观模型 的临界点 有同样的大尺度行为, 因为受同一个不动点 控制.

• 讨论不动点的性质: 关涉 (relevant), 非关涉 (irrelevant) 与边际的 (marginal) 方向

设 $\vec{\mu}$ 在 $\vec{\mu}^*$ 附近: $\vec{\mu} = \vec{\mu}^* + \delta\vec{\mu}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mu}' &= R_\xi\vec{\mu} = R_\xi\vec{\mu}^* + R_\xi\,\delta\vec{\mu} \\ \vec{\mu}' &= \vec{\mu}^* + \delta\vec{\mu}' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta\vec{\mu}' = R_\xi\,\delta\vec{\mu} = R_\xi^L\,\delta\mu + O((\delta\mu)^2)$$

其中: $(R_\xi^L)_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial\mu'_\alpha}{\partial\mu_\beta}\right)_{\vec{\mu}=\vec{\mu}^*}$ 是线性化变换算符

有: $\boxed{\delta\mu'_\alpha = \sum_\beta \left(\frac{\partial\mu'_\alpha}{\partial\mu_\beta}\right)_{\vec{\mu}=\vec{\mu}^*} \delta\mu_\beta}$

求解 R_ζ^L 的本征方程:

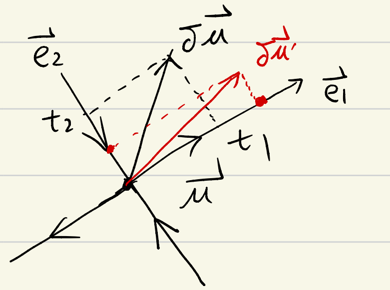
$$\boxed{R_\zeta^L \vec{e_j} = \rho_j(\zeta)\vec{e_j}}$$

$\vec{e_j}$: 本征矢; $\rho_j(\zeta)$: 本征值

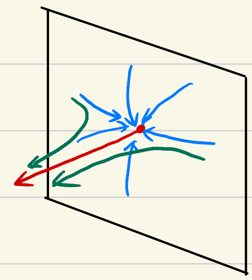
由于 $R_{\zeta'}R_\zeta \vec{e_j} = R_{\zeta'\zeta}\vec{e_j}$

$\therefore \rho_j(\zeta')\rho_j(\zeta) = \rho_j(\zeta'\zeta) \Rightarrow$ 本征值必须满足: $\rho_j(\zeta) = \zeta^{y_j}$, y_j与ζ无关

- 展开 $\delta\vec{\mu} = \sum_j t_j \vec{e_j}$

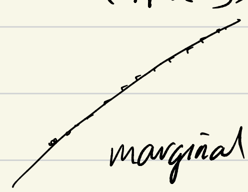


$$\delta\vec{\mu}' = R_\zeta^L \delta\mu = R_\zeta^L(t_1\vec{e_1} + t_2\vec{e_2} + \cdots)$$
$$= \rho_1(\zeta)t_1\vec{e_1} + \rho_2(\zeta)t_2\vec{e_2} + \cdots$$
$$= \sum_j t_j'\vec{e_j}$$



其中 $\boxed{t_j' = \zeta^{y_j} t_j}$

- 当 $y_j > 0$, t_j' 随 ζ 增大而增大, relevat (关联)
- 当 $y_j < 0$, t_j' …… 增大而缩小 irrelevant (非关联)
- $y_j = 0$, t_j' 不变 $\longrightarrow$ 不动点, 连续集

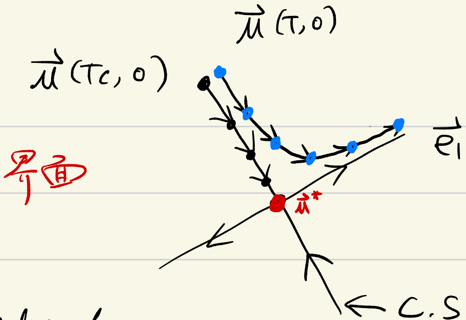


marginal

沿着这条线改变. 不会流到别处, 而是来到另一个不动点. 这个变化称为 marginal.

总的来看: irrelevant 方向很多. relevant 方向很少. $\Rightarrow$ 大的吸引域

- 由 $y_j<0$ 的 $\vec{e_j}$ 张成的子空间定义 critical surface



- 考虑 $B=0$. 对于足够小的 $T-T_c$, $\vec{\mu}(T)$ 非常接近临界面
  - $R_\xi \vec{\mu}(T)$ 随 ξ 的增加靠近 $\vec{\mu}^*$.
  - 但当 $\xi\to\infty$, $R_\xi\vec{\mu}(T,0)$ 会远离 $\vec{\mu}^*$, ∵ $\vec{\mu}(T)$ 不在 critical surface
  - 离开的讨论依赖于 y_j, 假设只有一个 $y_j>0$, 记为 y_1

定义: $$\delta\vec{\mu}(T)=\vec{\mu}(T)-\vec{\mu}^*=\sum_j t_j(T)\vec{e}_j$$

对于 ξ 足够大: $$R_\xi\vec{\mu}(T)\approx\vec{\mu}^*+R_\xi^L\,\delta\vec{\mu}(T)=\vec{\mu}^*+t_1\xi^{y_1}\vec{e}_1+O(\xi^{y_2}) \qquad ①$$

设 $t_1(T)$ 是 T 的光滑函数, 当 $T=T_c$, $t_1(T)=0$, 故展开为

$$t_1(T)=A(T-T_c)+B(T-T_c)^2+\cdots \qquad A\neq 0 \text{ 常数},\ B \text{ 常数}.$$

$$R_\xi\vec{\mu}(T)\approx\vec{\mu}^*+A(T-T_c)\xi^{y_1}\vec{e}_1+O(\xi^{y_2}) \qquad ②$$

我们知道 $T-T_c$ 的 scaling dimension: $\Delta_t=\frac{1}{\nu}$ (根据 $\xi\sim(T-T_c)^{-\nu}$)

②式告诉我们: $T'-T_c=(T-T_c)\xi^{y_1} \Rightarrow \boxed{y_1=\frac{1}{\nu}}$

另一个角度: 设 $\Xi=|A(T-T_c)|^{-\nu}$, 即 $A(T-T_c)=\left(\frac{1}{\Xi}\right)^{\frac{1}{\nu}}$, 如果 $\frac{1}{\nu}=y_1$, 那么

$$R_\xi\,\vec{\mu}(T)=\vec{\mu}^*\pm\left(\frac{\xi}{\Xi}\right)^{\frac{1}{\nu}}\vec{e}_1+O(\xi^{y_2})$$

附注: RG变换将 $\Xi\to\Xi'=\Xi/\xi$. 即 R_ξ 将 $T\to T'$, $A(T'-T_c)^{-\nu}=\Xi'$

• 现在考虑 $B\neq 0$，也会导致 $\vec{\mu}$ 离开临界面.

我们知道 标度 变换 使得：

$$h' = \zeta^{\Delta_h} h, \qquad \because \phi' = \zeta^{\Delta_\phi}\phi,\ \left[\int d^d x\, h\phi\right] = L^0$$

$$\Rightarrow \Delta_h + \Delta_\phi - d = 0 \Rightarrow \Delta_h = d - \Delta_\phi \quad \text{也写作 } y_h$$

因此：

$$R_\zeta \vec{\mu}(T,h) = \vec{\mu}^* \pm \left(\frac{\zeta}{\xi}\right)^{\frac{1}{\nu}} \vec{e}_1 + \zeta^{y_h} h\, \vec{e}_h + O(b^{1/2})$$

ζ^{y_h} 是 R_ζ 在 $\vec{e}_h$ 方向的本征值.

假设(一般总是) η 小，则 $y_h = \frac{1}{2}(d+2-\eta) > 0$，$h'$ 随 ζ 增大而增大，是关注方向.

• 一般地：$F[\phi]$ 中

$$\int d^d x\, g_0\, O(\vec{x})$$

O 可以是 ϕ^n 或 $\phi^m(\nabla\phi)^2$，或…… 场论语言，$O(\vec{x})$ 称 operator

RG rescale：
$$O(\vec{x}) \to O'(\vec{x}') = \zeta^{\Delta_0} O(\vec{x})$$

由 $F[\phi]$ 无量纲， $\Delta g_0 = d - \Delta_0$

$$g_0 \to g_0' = \zeta^{d-\Delta_0} g_0$$

总结：
- $\Delta_0 < d$，g_0 relevant (方向)
- $\Delta_0 > d$，g_0 irrelevant (方向)
- $\Delta_0 = d$，g_0 marginal (方向).

例：高斯不动点：

$B=0$ 时，在 $g=0$ 的子空间，即高斯近似下，我们已经推导出 RG 变换：

$$r_0(\zeta) = \zeta^2 r_0$$

不动点为 $\vec{\mu}_G^* = (r_0=0,\ g=0)$ 对应 $\zeta=\infty$，$T=T_c$

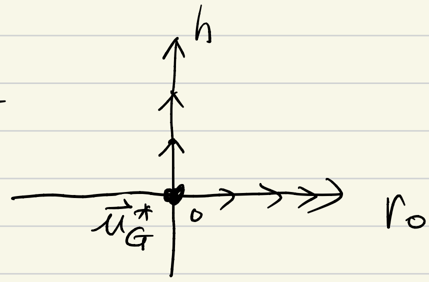
与 $\vec{\mu}_\infty^* = (r_0=\infty, g=0)$，对应 $\zeta=0$，$T=\infty$.

对于 $\vec{\mu}_G^*$，$\rho_1=\zeta^2$，$\Rightarrow y_1=2$. $\Rightarrow \nu=\frac{1}{2}$ 平均场

此外，rescale 时：$\phi_k' = \zeta^{-w}\phi_k$，$w=1+\frac{d}{2}$ $\Rightarrow$ $y=0$.

若 $B\neq 0$，$F[\phi] + \int d^dx\, h\phi \xrightarrow{RG} \int d^dx\, h\zeta^{y_h}\cdot\phi'$

$\vec{e}_h$ 方向本征值 $\rho_h=\zeta^{y_h}$，$y_h=\frac{1}{2}(d+2-y)=\frac{d+2}{2}$



$T\neq T_c$，$B\neq 0$ 写成矢量形式：

$\vec{\mu}(T,B) = \vec{\mu}^* + t_1\vec{e}_1 + h\vec{e}_h$，$R_\zeta\vec{\mu}(T,B) = \vec{\mu}^* + t_1\zeta^2\vec{e}_1 + h\zeta^{y_h}\vec{e}_h$

$$t_1 = r_0 = A\cdot(T-T_c)$$

$$t_1' = r_0' = \zeta^2 r_0 = \zeta^2 t_1 \Rightarrow T'-T_c = \zeta^2(T-T_c)$$