

第十九讲

§ Continuous Symmetries

本章我们离开 Ising, one more lesson from Landau's approach

• The Importance of Symmetry

之前我们谈到过, Landau 理论中物质-相由对称性刻画

更确切地说是由两个对称群描述: 1. G : the symmetry enjoyed by the free energy of the system.

2. H : the symmetry of the ground state

以 Ising 为例,

• $B=0$: free energy has a $G=\mathbb{Z}_2$ symmetry, 高温无序相这一对称性保持; 此时 $H=\mathbb{Z}_2$

相反, 在低温有序相, 对称性自发破缺, 系统必须在两个基态中选一个, 此时 $H=\phi$.

两个不同的 phases 由不同的 H 刻画

离散对称性破缺, 导致多重基态, 从一个 GS 到另一个 GS, by acting with the broken generators of G

• $B \neq 0$, 自由能没有 \mathbb{Z}_2 symmetry, so $G=\phi$.

Landau 判据 \Rightarrow 只有一个 phase, 通过高温 $T > T_c$ 区域, 从任一点移到另一点, 而不穿越相变.

同时, 调节 B at $T < T_c$, 我们可有一个一级相变, 发生在实际在同一个 phase 里的两个态之间.

• 理解: 一级相变发生在 G 从 ϕ 扩大到 \mathbb{Z}_2 时.

• 气-液相变.

Beyond Ising:

1. first 确定 order parameter and a 对称群 G , under which it transforms.

2. write down the most general Landau-Ginzburg free energy, 满足 G 不变.

3. 不同的相由基态满足的对称群 H 刻画.

• Landau: 对称性在相变时变化 \Rightarrow 理解 phase transition

• More: knowledges of G and $H \Rightarrow$ 确定低能性质 of a system, \leftarrow 通过 Goldstone's theorem 与各种拓扑考虑.

• 两个系统同一普适类: 相同的对称性 G

特别有趣: $G = \mathbb{R}^d \times SO(d)$, 空间平移与旋转, $G \rightarrow$ 不同 H .

内部 (internal) 对称群 G , 连续: 磁性, BEC, SF, SC.

§ $O(N)$ models,

由连续对称性描述的物质相更丰富.

最简单的模型包含 N 个实 scalar fields, $\vec{\phi}(\vec{x}) = (\phi_1(\vec{x}), \phi_2(\vec{x}), \dots, \phi_N(\vec{x}))$

要求自由能 invariant under the $O(N)$ symmetry

$$R \in O(N), \text{ 满足 } R^T R = 1 \text{ (子群)}, \quad \begin{aligned} \phi_a(\vec{x}) &\rightarrow R_a^b \phi_b(\vec{x}) \\ \vec{\phi}^T R^T R \vec{\phi} &= \vec{\phi}^T \vec{\phi} \end{aligned}$$

构造 LG 自由能: 满足 $O(N)$ 不变, 前几项是:

$$F[\vec{\phi}(\vec{x})] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \nabla \vec{\phi} \cdot \nabla \vec{\phi} + \frac{r_0}{2} \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} + g (\vec{\phi} \cdot \vec{\phi})^2 + \dots \right]$$

$$\nabla \vec{\phi} \cdot \nabla \vec{\phi} = \partial_i \phi_a \partial_i \phi_a \text{ 是 } O(N) \text{ 不变的. 证明: } R_b^a \partial_i \phi_a R_b^c \phi_c = \partial_i \phi'_b \partial_i \phi'_b \\ = (R^T)_a^b R_b^c \partial_i \phi_a \partial_i \phi_c = \delta_{ac} \partial_i \phi_a \partial_i \phi_c$$

• $O(2)$: The XY-model

$$\text{复数: } \psi(\vec{x}) = \phi_1(\vec{x}) + i\phi_2(\vec{x}), \quad O(2) \rightarrow U(1): \psi \rightarrow e^{i\theta} \psi.$$

$$F[\psi(\vec{x})] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + \frac{r_0}{2} |\psi|^2 + g |\psi|^4 + \dots \right]$$

XY-model or rotor model

描述二维系统:

1. magnets with \vec{S}_i 可在平面中转动. 微观 Hamiltonian 是对 Ising 的 $\{i, j\}$

$$E = -J \sum_{\langle i, j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j, \quad |\vec{S}_i| = 1, \text{ 也写为 } E = -J \sum_{\langle i, j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j)$$

粗粒化后得到上面的 Free energy.

2. 描述 Bose-Einstein condensate. 或 superfluid. (强耦合下 BEC)

ψ is related to off-diagonal long-range order in the one-particle density matrix. Saddle point Eq leads to

$$\delta \nabla^2 \psi = r_0 \psi + 4g |\psi|^2 \psi + \dots$$

pp Gross-Pitaevskii 方程.

有时 $\psi(\vec{x})$ 被视为宏观波函数, GP \rightarrow Nonlinear Schrödinger Eq.

• $O(3)$: The Heisenberg model

描述 magnets. \vec{S}_i 三维

§ Goldstone Bosons

$$M_0 = \sqrt{\frac{F_0^2}{4g}} \text{ or } \sqrt{\frac{F_0}{4g}}$$

连续对称性 的特别奇妙之处在于有序相. $v_0 < 0, \langle \phi \rangle \neq 0$. 磁 Ising: $M = \pm M_0$ 选-, 磁缺 Z_2 .

连续对称: 无穷多选择. 自由能极小 $\Rightarrow \langle |\phi| \rangle = M_0 = \sqrt{\frac{F_0}{4g}}$. 但不确定 ϕ 的方向. S^{N-1} 球面上每一点

能量相同. 无穷简并 \Rightarrow something new.

考虑位型 基 $\psi(\phi) = \int |\phi|^2 + g|\phi|^4$ 保持极小, 但是 $|\phi|^2 \neq 0$. 减小梯度可使能量进一步减小



这种激发称 Goldstone bosons, or Nambu-Goldstone bosons; 磁性系统: spin waves.

一般化: 激发的能耗 $\rightarrow 0$ 当波长 $\rightarrow \infty$, 称 soft mode, or, gapless. 与同样极限下, 能耗有限相后者 gapped.

在 QFT 中, gapless = massless. gapped = massive. 根据 $E = mc^2$.

gapless excitation 通常得系统的低温行为, 因其不受 Boltzmann 抑制.

例: phonons in solid. 平移连续对称破缺下的 Goldstone bosons.

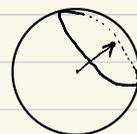
The symmetry Behind Goldstone Bosons.

更严格地, 我们有 Goldstone theorem: 任意系统, 破缺一个连续对称性导致一个 gapless 激发, 即 Goldstone boson

对 $O(N)$ model, $\langle \phi \rangle$ 选择一个方向使 $G = O(N)$ 破缺到 $H = O(N-1)$

(比如, $\langle \phi \rangle = (0, 0, \dots, M_0)$, $O(N)$ 对称性在那些 $(0, 0, \dots)$)

基态空间按群论是 the coset space. (陪集空间) $S^{N-1} = \frac{O(N)}{O(N-1)}$



连续对称性 G 自发破缺 $\rightarrow H$, 则基态 manifold 由 G/H 给出

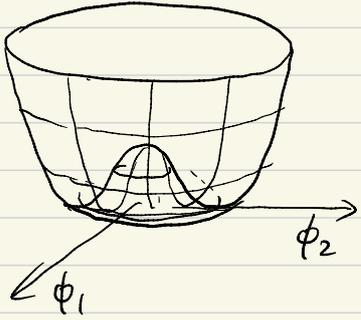
我们得到一个 Goldstone boson for 每个 broken symmetry generator, 共计

$$\# \text{ Goldstone Bosons} = \dim G - \dim H = \frac{1}{2} N(N-1) - \frac{1}{2} (N-1)(N-2) = N-1$$

↓
生成元

正是球面 S^{N-1} 的维数.

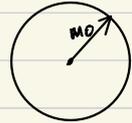
An example: the XY-model \rightarrow $O(2)$ model 或 $U(1)$ model.



"Mexican hat" potential

there is a circle, S^1 of minima: $\Rightarrow \psi(\vec{x}) = M(\vec{x}) e^{i\theta(\vec{x})}$,

the Ground state $M = M_0 = \sqrt{\frac{-\Gamma_0}{4g}}$, θ 任意.



If we write

$$M(\vec{x}) = M_0 + \tilde{M}(\vec{x}) \quad \text{径向.}$$

then, the free energy has the expansion

$$F[M, \theta] = \int d\vec{x} \quad \frac{g}{2} (\nabla \tilde{M})^2 + |\Gamma_0| \tilde{M}^2 + g \tilde{M}^4 + \frac{g}{2} M_0^2 (\nabla \theta)^2 + \delta M_0 \tilde{M} (\nabla \theta)^2 + \dots$$

Goldstone boson is $\theta(\vec{x})$, 不可有 θ^2 or θ^4 项, 只有梯度

$$\psi(\vec{x}) = (M_0 + \tilde{M}) e^{i\theta(\vec{x})} \Rightarrow \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi = (\nabla \tilde{M})^2 + (M_0 + \tilde{M})^2 (\nabla \theta)^2$$

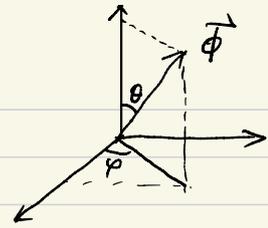
$$\frac{\Gamma_0}{2} (M_0 + \tilde{M})^2 = \frac{\Gamma_0}{2} (M_0^2 + 2M_0 \tilde{M} + \tilde{M}^2)$$

$$g (M_0 + \tilde{M})^4 = g (M_0^4 + 4M_0^3 \tilde{M} + 6g M_0^2 \tilde{M}^2 + 4M_0 \tilde{M}^3 + \tilde{M}^4)$$

$$M_0^2 = \frac{-\Gamma_0}{4g}, \Rightarrow 6g M_0^2 \tilde{M}^2 = \frac{-6\Gamma_0}{4} \tilde{M}^2$$

Another example: the Heisenberg Model \rightarrow $O(3)$ model

$$\vec{\phi} = M (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$$



ordered phase: $M = M_0 \neq 0$, with θ and φ 任意. 展开: $\vec{\phi}(\vec{x}) = M_0 + \vec{\pi}(\vec{x})$

$$F[M, \theta, \varphi] = \int d^d x \frac{1}{2} (\nabla \vec{\pi})^2 + |\gamma_0 \vec{\pi}|^2 + g \vec{\pi}^4 + \dots + \frac{1}{2} M_0^2 [(\nabla \theta)^2 + \sin^2 \theta (\nabla \varphi)^2] + \dots$$

这里 θ, φ 是两个 Goldstone modes, 只有梯度起作用. 模之间有相互作用. $\sin^2 \theta (\nabla \varphi)^2$

Goldstone bosons 动能项 take the form of the metric on the two-sphere S^2 : $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$

这不是巧合. Goldstone bosons 描述 free energy minima 附近涨落.

关联函数:

前面讨论过自由能二次项与关联长度 ξ 有关: $\xi^2 = \frac{\chi}{\gamma_0}$, 对于 Goldstone bosons 这个二次项必须消失, 因此 $\xi \rightarrow \infty$.

这体现在关联函数按 power law decays, 而不是指数. 在 XY model 里最简单.

$$F[0] = \int d^d x \frac{1}{2} M_0^2 (\nabla \theta)^2 + \dots$$

高阶项都是导数, 不影响下面的讨论.

利用 (2.20),
$$G(\vec{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{k^2 + \gamma_0}$$

$$\langle \theta(\vec{x}) \theta(\vec{y}) \rangle = \frac{1}{\delta M_0^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{k^2} \quad (\beta \text{ 被归缩到 } \gamma_0, \gamma \text{ 中})$$

这里忽略 θ 的周期性, 视为实数 \mathbb{R} . 以上类似于临界点的关联函数, 临界点可看作具有 gapless excitations. 但还是有不同之处.

1. 临界点的 power law decay 要 fine-tuning of a parameter: $T = T_c$ 相反, 自发对称破缺要更皮实. 如 XY 模言之, 有整个 phase 都是长程关联.

2. Goldstone bosons 比临界点的 gapless modes 更易于理解.

临界点的代数衰减指数为 $d-2+\gamma$, 有 anomalous exponent $\gamma \neq 0$.

Goldstone boson 没有这一复杂性, 所有动力学由对称性限定.

两点: ① $T < T_c$ 才简单. $T = T_c$ 复杂. ② $d > d_c$ 下临界指数.