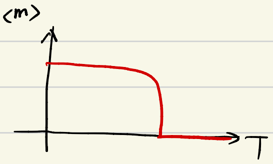
第四讲

§3 相变的朗道理论

前面讲过，相变时一些物理量非解析. 对 Ising model, $\langle m\rangle$ 就是这样的物理量: 随着温度变化表现出非解析行为.



朗道理论是理解相变定性行为的简单而有效的方法，基于两点：自由能 与 对称性.

本节将其应用到 Ising model, 重点在自由能.

我们从有效自由能 $F(m)=Nf(m)$ 出发，磁化强度 m 称为序参量 (order parameter)

$$f(m)\approx -Bm-\frac{1}{2}Jqm^2-T\left(\ln 2-\frac{1}{2}(1+m)\ln(1+m)-\frac{1}{2}(1-m)\ln(1-m)\right)$$

Landau 理论考虑序参量是小量的情形，因此可将上式展开

$$\boxed{f(m)\approx -T\ln 2-Bm+\frac{1}{2}(T-Jq)m^2+\frac{1}{12}Tm^4+\cdots}$$

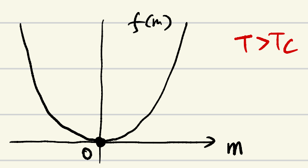
$f(m)$ 的最小点对应最可几的 $m\approx\langle m\rangle$, 朗道理论就是观察 $f(m)$ 的最小点随系统参数的变化. $B=0$ 与 $B\neq 0$ 的情况不同.

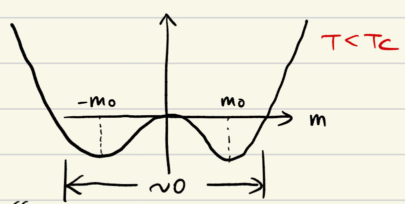
- 首先讨论 $B=0$, 连续相变

扔掉与 m 无关的 $-T\ln 2$.

$$f(m)\approx\frac{1}{2}(T-Jq)m^2+\frac{1}{12}Tm^4+\cdots$$

可以看到 $f(m)$ 的行为取决于 m^2 项的系数是否大于零. 定义 $T_c=Jq$ 为临界温度 critical temperature





$m=0$ 是 minima.

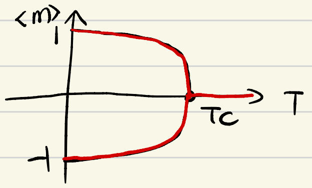
$m=0$ 是极大值,

minima: $m=\pm m_0$, $m_0=\sqrt{\frac{3(T_c-T)}{T}}$

- 高温磁化强度 $\langle m\rangle=0$.
- 低温下, $\langle m\rangle=m_0$ 或 $-m_0$.
- m_0 公式在 $T\lesssim T_c$ 成立 (m 小, $f(m)$ 高阶项可忽略)

随着 $T\to 0$, m_0 会朝大 $|m|$ 方向移动. $f(m)$ 需考虑高阶项.

当 $T\ll T_c$, m_0 靠近 1, 需 $f(m)$ 完整形式.



通常 物理量变化是缓和(光滑)的.

但是 $\langle m \rangle$ 在 T_c 处 突然消失 导数不连续, 之后 $T>T_c$ 保持为零 $\longrightarrow$ 相变

- $\langle m \rangle = 0$, 定义为 disordered phase (无序相)
- $\langle m \rangle \neq 0$, 系统处于 有序相 (ordered phase)

- $\langle m \rangle$ 自身连续, 故称 连续相变. 又称二级相变 (second order phase transition)

- 历史上 相变按 F_{thermo} 的导数的行为来分类 (Ehrenfest 分类): F_{thermo} 的 n阶导数不连续 就称其为 n阶相变.

现实中 很少有相变是 2 阶 (2级) 以上的.

- 相变特征是一些物理量不连续. 可是

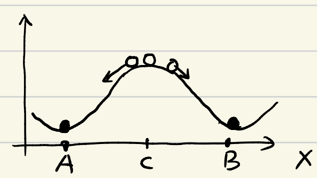
$$Z(T, B) = \sum_{\{S_i\}} e^{-\beta E[S_i]}$$ 是光滑、解析函数之和, 不太可能从中导出非解析的物理量.

loophole: Z 只有求和有限时解析. $N\to\infty$ 时无法保证.

$\Rightarrow$ 真正的相变只发生在无限大系统 $\longrightarrow$ 热力学极限: $N\to\infty$, 加一条 $\frac{N}{V}$ 有限.

实验: $N \sim 10^{23}$. 可视为 $N=\infty$.　　严格论证: 李杨定理.

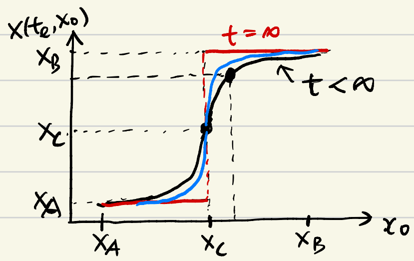
理解: 光滑函数怎样变"坏"的?



设想一个小球从 C 附近滚落, 过阻尼. $m=1$, $r=1$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} - \frac{\partial V(x)}{\partial x} \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

给定初始位置 x_0, 可算出末时刻 t_e 的位置 $x(t_e, x_0) = -\int_0^{t_e} \frac{\partial V(x)}{\partial x} dt + x_0$



- $x(t_e, x_0)$ 是 x_0 的 连续函数, 若 t_e 有限 (finite)
- 当 $t_e\to\infty$, 变成不连续: x_0 偏离 x_c 无穷小, 都导致末位置为 A 或 B: 阶跃!

- 在平均场理论中, 有效自由能 $f(m)$ 是解析的; 只有 m 的整数幂.

但是其 minima 是温度的 non-analytic function.　　($N\to\infty$ 的效果 已经被捕捉住)

我们再看 热容 (heat capacity) 在 T_c 附近的行为

$$C = \frac{\partial \langle E\rangle}{\partial T}.$$

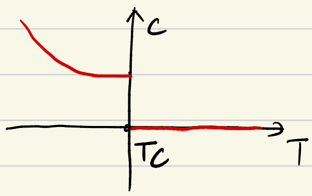
已知关系: $\langle E\rangle = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} \Rightarrow C = \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log Z$ or $C = \frac{\partial}{\partial T}\left(T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)$

$$F_{\text{thermo}} = -T\log Z, \approx f(m_{min}) \times N, \qquad \log Z = \frac{-N f(m_{min})}{T}$$

① $T > T_c$. $m_{min} = 0$. $f(m_{min}) = 0$. $\Rightarrow C = 0$.

② $T < T_c$. 代入 m_0, $f(m_0) = \frac{1}{2}(T-T_c)m_0^2 + \frac{1}{12}T m_0^4 = \frac{1}{2}(T-T_c)\frac{3(T_c-T)}{T} + \frac{1}{12}T\frac{9(T_c-T)^2}{T^2}$

$$\Rightarrow f(m_0) = -\frac{3}{4}\frac{(T_c-T)^2}{T} \Rightarrow \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = -N\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{(T_c-T)^2}{T^2}\right]\cdot\frac{3}{4}$$



比热:

$$c = \frac{C}{N} \to \begin{cases} 0 & \text{as } T \to T_c^+ \\ \frac{3}{2}, & \text{as } T \to T_c^- \end{cases}$$ jumps discontinuously

同样在 T_c 处非解析, 二阶相变

singular piece: 来自对 $(T-T_c)$ 的求导.

Spontaneous Symmetry Breaking: 自发对称破缺

朗道自由能: $f(m) = \frac{1}{2}(T-T_c)m^2 + \frac{1}{12}Tm^4 + \cdots$

有 Z_2 对称性. 即: $f(m)$ 在 $m \to -m$ 下不变. 来自模型的能量 $E = -B\sum_i s_i - J\sum_{\langle ij\rangle} s_i s_j$ (在 $B=0$ 时有同样性质)

$T < T_c$, 系统从两个基态中选择一个: $m = m_0$ or $m = -m_0$ 打破 Z_2 对称性!

- When a symmetry of a system is Not respected by the ground state $\Rightarrow$ the symmetry is spontaneously broken

这是本课程的主旋律, 也是粒子物理的话.

- 严格讲, 对称性的自发破缺只在无穷大系统发生

也可以通过以下极限来理解: $\langle m\rangle = \lim_{B\to 0}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_i \langle s_i\rangle$

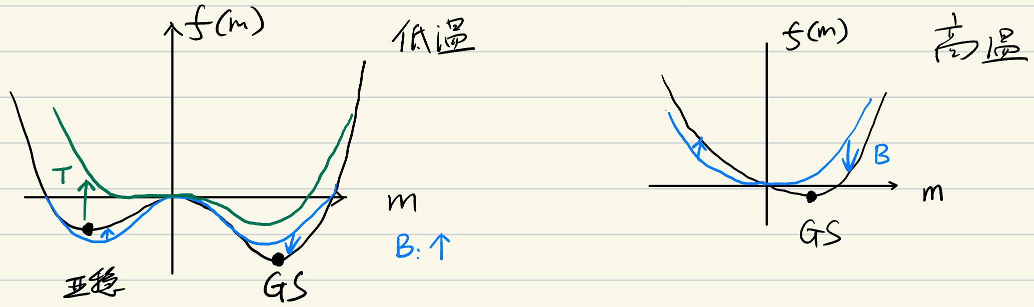
- 在有限 B 下, 有限 N 下的 $\langle m\rangle = \frac{1}{N}\sum_i\langle s_i\rangle \neq 0$.
取极限 $N\to\infty$, $\langle m\rangle = m_0$ (or $-m_0$, 取决于 B 的正负)
再取极限 $B\to 0$, $\langle m\rangle = m_0$, 不会恢复 $s_i = \pm 1$ 的对称性. 最终 $\langle m\rangle \neq 0$

- 反之若先 $B\to 0$, 则 $\langle m\rangle \to 0$, 因为 $s_i = \pm 1$ 对称恢复, 再取 $N\to\infty$ 没有用. 仍有 $\langle m\rangle = 0$

• 再讨论 $B\neq0$: 一级相变 First order phase Transitions

$$f(m) \approx -Bm + \frac{1}{2}(T-T_c)m^2 + \frac{1}{12}Tm^4 + \cdots$$

两种情形:



• Low T, two minima, 其中一个更低, → true ground state of the system 基态

另一个是亚稳态, meta-stable state

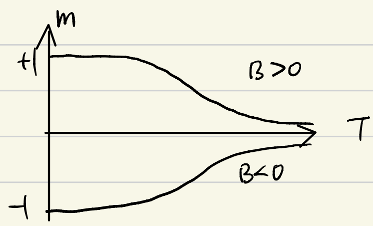
系统可通过涨落, 越过 energy barrier, 所以寿命有限 (不是 $N\to\infty$ 的平衡态)

升高温度, 某个值 (depends on B) 后, meta-stable state 消失, → spinodal point

• 最重要是系统的基态, 当我们变温时, 不会有定性改变.

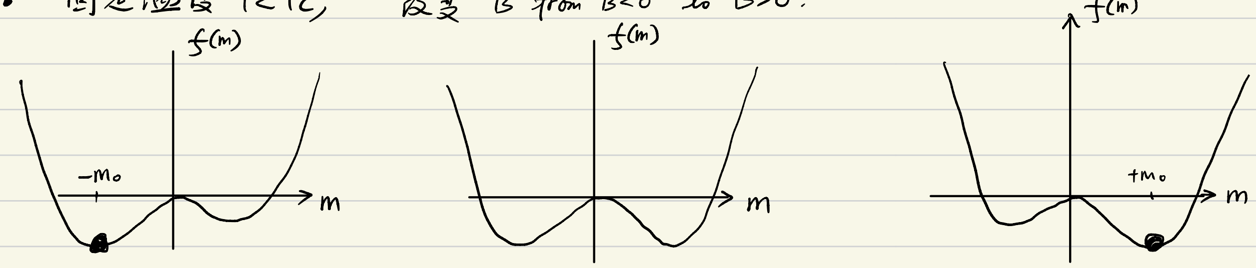
在高温下, $m \to \frac{B}{T}$, as $T\to\infty$. $\Leftarrow \frac{\partial f}{\partial m}=0$

at low T. $m\to\pm1$, $f(m)$ 最小. m 的符号由 B 决定

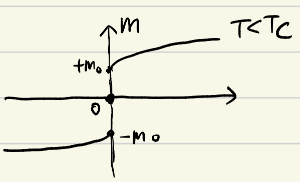


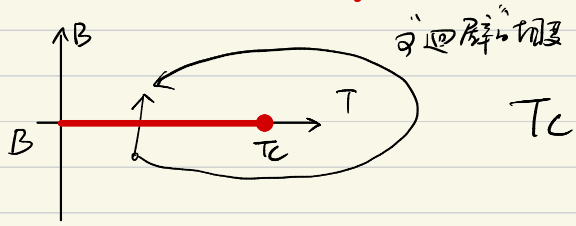
⇒ 对于固定 B, 没有作为温度函数的相变

• 固定温度 $T<T_c$, 改变 B from $B<0$ to $B>0$.



m jumps from $-M_0$ to $+M_0$ as B flips from negative to positive → 一级相变 (不连续相变)





T_c 可视为一级相变线的终点

(回忆汽液相变的临界点)