

第五讲

• 临界点附近

Question: 系统 $T=T_c$, 调节 B , $\langle m \rangle$ 怎么变?

此时: $f(m) = -Bm + \frac{1}{2} T_c m^4 + \dots$

小 m , 忽略高阶 m , 自由能极小 $\Rightarrow m^3 \sim B \Rightarrow m \sim \pm |B|^{1/3}$. 状态方程. 类似 $pV = nRT$.

Question: 磁化率 $\chi = \left. \frac{\partial \langle m \rangle}{\partial B} \right|_T$,

设 $B=0$, 温度分别从高温和低温趋于 T_c , χ 行为怎样?

1. from above: $f(m) = \delta B \delta m + \frac{1}{2} (T - T_c) \delta m^2 \Rightarrow \delta m \approx \frac{\delta B}{T - T_c} \Rightarrow \chi \sim \frac{1}{T - T_c}$

2. from below: $m_0 = \sqrt{\frac{3(T_c - T)}{T}}$, δB 造成 $m_0 \rightarrow m = m_0 + \delta m$

设: $f(m) \approx -\delta B m + \frac{1}{2} (T - T_c) m^2 + \frac{1}{2} T m^4$. \hookrightarrow minima $m = m_0 + \delta m$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial m} = 0 &\Rightarrow -\delta B + (T - T_c)(m_0 + \delta m) + \frac{1}{2} (m_0 + \delta m)^3 = 0 \\ \text{保留 } \delta m \text{ 一阶, 利用 } (T - T_c)m_0 + \frac{1}{2} m_0^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} [T m_0^2 + (T - T_c)] \delta m &= \delta B \Rightarrow \delta m = \frac{\delta B}{2(T_c - T)} \\ \Rightarrow \chi &\sim \frac{1}{2(T_c - T)} \end{aligned}$$

即: $\chi \sim \frac{1}{|T - T_c|}$

• Landau平均场理论的有效性: 以上结果对吗?

源于 MF approximation, $\frac{E}{N} = -Bm - \frac{1}{2} J q m^2$ ← 没有有效性分析

也有理由乐观: 因为最终相图+结构只与有效自由能泰勒展开的定性分析有关, 与细节无关.

我们将会看到 Landau平均场理论的有效性依赖于空间维数 d .

- $d=1$. MFT 完全失败, No phase transition
- $d=2, d=3$. 相图基本结构是对的. 细节 at $T \approx T_c$ 不对.
- $d \geq 4$. MFT 正确.

以上说法原则上适用于所有模型:

1. 有 d_l , 当 $d \leq d_l$, MFT 失败, d_l 称为下临界维数 lower critical dimension

Ising model 的 $d_l = 1$, 以后会遇到 $d_l = 2$ 模型

2. 有 d_u , MFT 在 $d \geq d_u$ 时有效. d_u 称为上临界维数 upper critical dimension

Ising model 的 $d_u = 4$ 由于邻居太多, 平均效果可靠.

• 临界指数 critical exponents

回到 $d_l < d < d_u$, MFT 定性正确, 但定量不准确. 引入临界指数 $\alpha, \beta, \gamma, \nu$ 来看.

由 $m_0 = \left[\frac{3(T_c - T)}{T} \right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$ 对于 $T < T_c$, $\langle m \rangle \sim (T_c - T)^\beta$, $\beta = \frac{1}{2}$.

当 $T \rightarrow T_c$ 时, $C = \begin{cases} 0 & T \rightarrow T_c^+ \\ \frac{3}{2} & T \rightarrow T_c^- \end{cases}$ 可写成 $C \sim C_{\pm} |T - T_c|^{-\alpha}$, with $\alpha = 0$, C_{\pm} 对于 $T > T_c$ 与 $T < T_c$ 不同

定义 γ : $\chi \sim \frac{1}{|T - T_c|^\gamma}$, $\Rightarrow \gamma = 1$

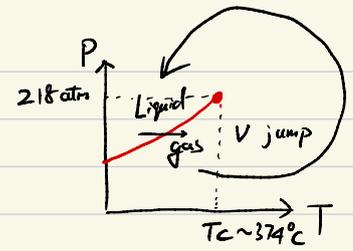
定义 ν : $m \sim B^{\frac{1}{\nu}}$ $\Rightarrow \nu = 3$

实际:	MFT	$d=2$	$d=3$
α	0	0 (log)	0.1101
β	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0.3264
γ	1	$\frac{7}{4}$	1.2371
ν	3	15	4.7898

* $d \geq 2$: $C \sim -\log |T - T_c|$

* $d=2$ 解析结果 $d=3$ 数值. 拟合实验.

• 普适性初窥：与汽-液相变对比



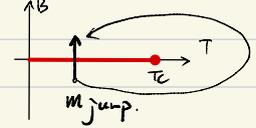
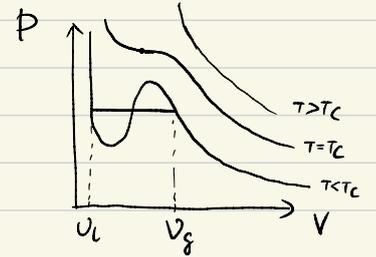
Ising 模型相图与汽液相变相图非常像，
定量地看：利用 van der Waals 方程：

$$U_{\text{gas}} - U_{\text{liquid}} \sim (T_c - T)^\beta \quad \beta = \frac{1}{2} \quad \text{沿相变线}$$

$$U_{\text{gas}} - U_{\text{liquid}} \sim (P - P_c)^\delta \quad \delta = 3 \quad \text{固定 } T = T_c$$

$$K \sim \frac{1}{|T - T_c|^\nu} \quad \nu = 1 \quad (K = -\frac{1}{\nu} \frac{\partial \nu}{\partial P} \Big|_T) \quad \text{沿相变线}$$

C 跃变，沿相变线



以上指数与 Ising model 平均场指数完全相同。

平均场指数是错的，不说明问题？

OK, 实验实测指数在 2d 与 3d 分别与 2d 和 3d Ising model 严格律和标度律 (前表) 一致!

怎么可能? 所有的微观细节都不重要。描述汽液相变, Ising 模型的相变理论是一样的!

理论物理学家的梦想: 不论多高维的近似, 差在“真空球形鸡”, 只要抓住了要点, 就可以得到严格正确的结果。

Nature throw away the messy details to focus on elegant essentials.

完全不同的系统有相同的临界行为, 这谓之 **普适性**. *universality*

所有的连续相变都有 Ising 一样的指数? 也不是。

临界行为分成一些 **普适类** *universality class*, 与 d 和对称性有关。后面讨论

• Ising model as a lattice gas. 另一个角度

汽液相变 = “真空球形鸡”

$n_i = 0, 1$, (i 是 lattice site) 表示 i 是空还是被粒子占据.

$$E = -4V \sum_{\langle ij \rangle} n_i n_j - \mu \sum_i n_i$$

$V > 0$. 第一项表示粒子间的吸引势能.

μ 是化学势 chemical potential, 控制系统的粒子数.

通过映射 $s_i = 2n_i - 1$, 上式对应 Ising model.

$$4V n_i n_j = 4V \left(\frac{s_i+1}{2}\right) \left(\frac{s_j+1}{2}\right) = V s_i s_j + V(s_i + s_j) + V, \quad \mu n_i = \frac{s_i+1}{2} \mu$$

$$E \rightarrow -V \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - \left(\frac{\mu}{2} + 2V\right) \sum_i s_i + \text{const.}$$

$$\frac{\mu + 4V}{2} \leftrightarrow B, \quad V \leftrightarrow J$$

密度
$$\rho = \frac{1}{N} \sum_i n_i = \frac{1}{N} \sum_i \frac{s_i+1}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2} + m$$

这个模型可以描述汽-液相变? 可以!

§4 Landau-Ginzburg Theory

普适性: 构造能给出正确物理的最简单模型, 忽略真实系统的细节

但是, Landau理论用 m 来描述一个位型也太过分了! 丢掉了所有空间变化.

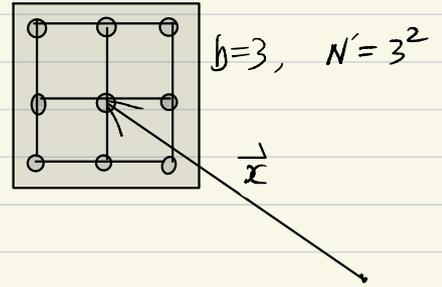
推广: "允许" 系统 偏离 均匀 m 的状态. 这即是 Landau-Ginzburg 理论

Idea: 将序参量 m 升级为在空间变化的场 (field) $m(\vec{x})$: 局域序参量 local order parameter

步骤:

第一步: 从 lattice 开始作"粗粒化" (coarse-graining): 分块 (block, or box)

每 box 包含 $N' = b^d$ 个格点, ba 小于其它 length scale (关联长度)
(a 是 lattice spacing, 晶格常数).



对平均场化做强改

$$m(\vec{x}) = \frac{1}{N'} \sum_i s_i, \quad \vec{x} \text{ 是 box 的坐标.}$$

①. 在我们关心的尺度下, \vec{x} 可视为连续 (测量总是在一定范围下平均)
(N' 不能太大)

②. 每个 \vec{x} 上, $m(\vec{x})$ 是按 $\frac{1}{N'}$ "量子化" 的, N' 要够大, so that $m(\vec{x})$ 在 $[-1, 1]$ 中连续.

最终 $m(\vec{x})$ 是个连续函数. 但: $m(\vec{x})$ 不能在小于 box 之间距离的尺度上变化.

• 由于普适性, 也不需要太多细节上的考虑.

• 第二步: 如之前一样.

$$Z = \sum_{m(\vec{x})} \sum_{\{s_i\} | m(\vec{x})} e^{-\beta E[\{s_i\}]} = \sum_{m(\vec{x})} e^{-\beta F[m(\vec{x})]}$$

这里 $\{s_i\} | m(\vec{x})$ 意思是对所有对应 $m(\vec{x})$ 的位型求和.

例: 两自旋:

$$m = \frac{s_1 + s_2}{2} \quad Z = \sum_{s_1 s_2} e^{-\beta s_1 s_2} = \sum_m \sum_{\{s_i\} | m} e^{-\beta s_1 s_2}$$

$m = -1, 0, 1, \quad \{s_i\} | m = -1: s_1 = -1, s_2 = -1$
 $\{s_i\} | m = 0: s_1 = -1, s_2 = 1 \text{ 与 } s_1 = 1, s_2 = -1$
 $\{s_i\} | m = 1: s_1 = 1, s_2 = 1$

$$e^{-\beta F[m(\vec{x})]} = \sum_{\{s_i\} | m(\vec{x})} e^{-\beta E[\{s_i\}]}$$

我们定义了有效自由能 $F[m(\vec{x})]$: 是泛函 (functional): 喂给它一个函数 $m(\vec{x})$, 吐出一个实数

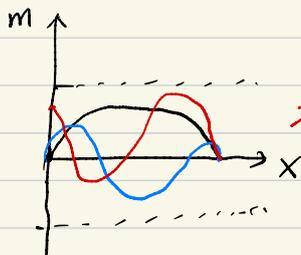
称为 Landau-Ginzburg free energy.

对 $m(x)$ 的求和, 改写成对每个 \vec{x} 处, 对 m 的积分.

$$Z = \int dm(\vec{x}_1) dm(\vec{x}_2) \dots dm(\vec{x}_{N_V}) e^{-\beta F[m(\vec{x})]} = \int \mathcal{D}m(\vec{x}) e^{-\beta F[m(\vec{x})]}$$

就是所谓的泛函积分 (functional integral),

又称为路径积分 (path integral):



不同 $m(x)$ 函数对应不同的路径.

其实它是高维积分.

跟原先的配分函数相比, 只不过是 LG free energy $F[m(x)]$ 起到场 $m(x)$ 的有效哈密顿的作用

原理里, 一个场位型 $m(x)$ 出现的几率为.

$$P[m(x)] = \frac{e^{-\beta F[m(x)]}}{Z}$$

我们在作场的统计力学, 而不是粒子位置、动量的统计力学了.