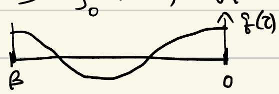
第八讲

回顾： 质点 q 行为， $\mathcal{L} = T-V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ $D=0$

$$\langle q'|e^{-iHt'}|q\rangle = \int_q^{q'} \mathcal{D}q(t)\, e^{iS(t)}, \quad S=\int_0^{t'} \mathcal{L}\,dt, \quad \delta S=0 \Rightarrow \boxed{m\ddot{q} = -m\omega^2 q}$$

• 对应温度 $T=\frac{1}{\beta}$ 的量子统计. $\Rightarrow$ $Z = \int \mathcal{D}q(\tau)\, e^{-S}$, $S=\int_0^{\beta}\mathcal{H}\,d\tau$, $\mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$, $\dot{q} \equiv \frac{dq}{d\tau}$



$\delta S=0 \Rightarrow \boxed{m\ddot{q} = m\omega^2 q} \leftarrow -V(x)$，瞬子解 instanton

• 对应 $H = \int_0^{\beta} dx\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q(x)}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2(x)\right]$ 的经典系统（长度为 β 的链），温度为 $\tilde{\beta}$， $d=D+1=1$

$$Z = \int \mathcal{D}q(x)\, e^{-\tilde{\beta}H}, \quad \tilde{\beta}=m.$$

· H 中没有"真的"动能了

类似地： 场 $\varphi(\vec{x},t) = \varphi(x)$， $d=D+1$， $x_0 = ct$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\varphi^4 \to T-V$$

其中 $(\partial\varphi)^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)^2 - \sum_{i=1}^{D}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2$

$$S = \int d^dx\, \mathcal{L}. \quad Z = \langle 0|e^{-iHt'}|0\rangle = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{iS(t)}$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow \boxed{\partial_\mu\partial^\mu\varphi + m^2\varphi + \lambda\varphi^3 = 0.}$$

• $\lambda=0$ 时 KG 方程 即 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_0^2} - \sum_i \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} + m^2\varphi = 0$

• $m=0$ 时，退化成波动方程

• 若研究场的量子统计，处于 $T=\frac{1}{\beta}$ 的环境之中，

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{-S(\tau)}$$

其中 $S = \int d^dx\, \mathcal{H}$ → $T+V$，对 x_0 的积分从 0 到 β.

$$\mathcal{H} = +\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)^2 + \sum_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_0^2} + \sum_i \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = m^2\varphi + \lambda\varphi^3}$$

• 以上统计对应一个经典系统的统计. $d=D+1$ 维空间，将 x_0 维度视为空间

$$H = \int d^dx \sum_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$$

$$= \int d^dx\left[(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4\right]$$

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{-H}$$

回到 Ising model 的场论描述

§4.3 The saddle Point and Domain Walls.

回到 Ising model 的 Landau-Ginzburg 自由能， $Z=\int \mathcal{D}m(\vec{x})\, e^{-\beta F[m(\vec{x})]}$.

$$F[m(\vec{x})] = \int d^d\vec{x}\,\left[\tfrac{1}{2}\alpha_2(T)m^2 + \tfrac{1}{4}\alpha_4(T)m^4 + \tfrac{1}{2}\gamma(T)(\nabla m)^2 + \cdots\right]$$

这时 我们求助于 saddle point 方法：假设 Z 由使 LG 自由能最小的位型(路径)主导

- 类似于 路径积分中最小作用量 给出经典路径.

考虑一个位型(路径) $m(\vec{x})$， 附近的位型 $m(\vec{x})+\delta m(\vec{x})$ 与之相比 自由能的变化为

$$\delta F = \int d^d x\,[\alpha_2 m\,\delta m + \alpha_4 m^3\delta m + \gamma\, \nabla m\cdot\underbrace{\nabla\delta m}_{=\delta(\nabla m)}] \overset{分部}{\underset{积分}{=}} \int d^d x\,[\alpha_2 m + \alpha_4 m^3 - \gamma\nabla^2 m]\,\delta m$$

其实在作泛函导数.

$$\frac{\delta F}{\delta m(\vec{x})} = \alpha_2 m(\vec{x}) + \alpha_4 m^3(\vec{x}) - \gamma\nabla^2 m(\vec{x})$$

注意此导数与位置 $\vec{x}$ 有关， 类似 $\delta S=0$ (或 $\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}=0$):

$$\left.\frac{\delta F}{\delta m}\right|_{m(\vec{x})} = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma\nabla^2 m = \alpha_2 m + \alpha_4 m^3} \quad ①$$

Euler-Lagrange Eq.

(α_2 类似 KG 方程中的 m^2.)

- 最简单的解: $m(\vec{x})=m \Rightarrow$ 回到 Landau MF theory: $\alpha_2 m + \alpha_4 m^3 = 0$, 设 $\alpha_2(T)\sim T-T_c$

1. $T>T_c$, $\alpha_2>0$, $m_0=0$.
2. $T<T_c$, $\alpha_2<0$, $m_0=\sqrt{-\frac{\alpha_2}{\alpha_4}}$

$\Rightarrow$ 平均场近似是 Landau-Ginzburg 理论的 saddle point 近似 (或经典场论) 的一个解

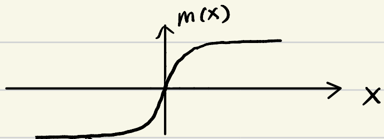
- Domain Walls.

但①式包含了比平均场更多的内容;即 $m(\vec{x})$ 在空间怎样变化.

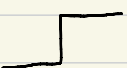
假设 $T<T_c$, 有两个简并的基态: $m(\vec{x})=m_0$ 和 $m(\vec{x})=-m_0$

现在设想一半空间 $m(\vec{x})=m_0$，另一半空间 $m(\vec{x})=-m_0$. 两个区域称为 domain (磁畴),

交界的区域称为 domain wall (畴壁)



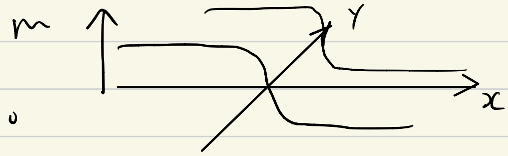
domain wall 会是什么样的? 公式①可以给我们答案. 但需另外一种边界条件.

不会  因为这样 $\nabla m\to\infty$. 自由能太高

也不会非常缓变, 因为不同于 $m_0,-m_0$ 的 $m(x)$ 使自由能升高.

} 折中

满足方程. $\gamma \frac{d^2 m}{dx^2} = \alpha_2 m + \alpha_4 m^3$ (设 domain wall 垂直于 x 方向)



加上边界条件: $x \to \pm\infty$ 时 $m(x) \to \pm m_0$

解为 $m(x) = m_0 \tanh\left(\frac{x-X}{W}\right)$ ② $\mathrm{th}\,x = \frac{e^{+x}-e^{-x}}{e^{+x}+e^{-x}}$,

$\frac{d\,\mathrm{th}x}{dx} = 1 + \frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$

$\frac{d^2\mathrm{th}x}{dx^2} = (2\,\mathrm{th}x + 2\,\mathrm{th}^3x)\frac{1}{W^2}$

X 是 domain wall 的位置, W 是其宽度: $W = \sqrt{-\frac{2\gamma}{\alpha_2}}$

下面计算这种解的自由能代价(cost, 比均匀解升高多少). 将②代回自由能表达式

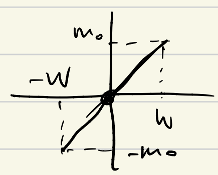
$\alpha_4 m_0^2 = \frac{2\gamma}{W^2}$

$$\Delta F = \int d^dx \left[\frac{1}{2}\alpha_2 m^2 + \frac{1}{4}\alpha_4 m^4 + \frac{1}{2}\gamma(\nabla m)^2 - \frac{1}{2}\alpha_2 m_0^2 - \frac{1}{4}\alpha_4 m_0^4\right]$$

可得: $\Delta F \sim L^{d-1}\sqrt{\frac{-\gamma\alpha_2^3}{\alpha_4^2}} \equiv F_{wall}$

估计: 在 $\frac{x-X}{W} < 1$ 时, $\mathrm{th}\left(\frac{x-X}{W}\right) \sim \frac{x-X}{W}$, 即 domain wall 内.

$\Rightarrow \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{dm}{dx}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\gamma m_0^2}{W^2}$ $\qquad m_0 = \sqrt{\frac{-\alpha_2}{\alpha_4}}$



$$\Delta F \sim \frac{1}{2}\frac{m_0^2\gamma}{W^2}\cdot 2W \times L^{d-1} \sim \gamma\left(\frac{-\alpha_2}{\alpha_4}\right)\sqrt{\frac{-\alpha_2}{2\gamma}}\cdot L^{d-1} = L^{d-1}\sqrt{\frac{-\gamma\alpha_2^3}{2\alpha_4^2}}$$

在 $-W$ 与 W 之间, $\frac{1}{2}\alpha_2 m_0^2 + \frac{1}{4}\alpha_4 m_0^4 = \frac{1}{2}\alpha_2\left(\frac{-\alpha_2}{\alpha_4}\right) + \frac{1}{4}\alpha_4\frac{\alpha_2^2}{\alpha_4^2} = -\frac{\alpha_2^2}{4\alpha_4}$

乘上 $2WL^{d-1}$ $\Rightarrow -\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_4}\cdot\sqrt{\frac{2\gamma}{\alpha_2}}\cdot L^{d-1} = -L^{d-1}\sqrt{\frac{-\gamma}{2\alpha_4^2}}$

最终 $\Delta F = 2L^{d-1}\sqrt{\frac{-\gamma\alpha_2^3}{2\alpha_4^2}}$

- 靠近临界点时 $\alpha_2 \to 0$, $\Rightarrow W \to \infty$. $\Delta F \to 0$.
- 有 domain wall 的位型是特定边界条件下的自由能最小解(真空)

§4.4 下临界维数

我们来解释为什么 Ising model 在一维没有相变.（朗道平均场失效）

假设 $\alpha_2(T)<0$，此时由平均场（saddle point 解）应该有对称性破缺 $m=\pm m_0$

先设系统尺寸为 L. 在左侧 $x=-\frac{L}{2}$ 处，固定 $m=m_0$. 系统似乎会处于 $m(x)=m_0$ 的状态.

但是. 在 $x=X$ 处出现一个 domain wall 的几率为

$$p(X)=\frac{e^{-\beta F_{wall}}}{Z}$$

由于 $F_{wall}>0$，此几率指数小，似乎可忽略. 然而 X 可以在 $[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$ 之间任意位置，因此

$$P[X\text{任意}]=\frac{e^{-\beta F_{wall}}}{Z}\cdot\frac{L}{W}=\frac{e^{-\beta F_{wall}+\ln\frac{L}{W}}}{Z}$$

由于 $F_{wall}\sim L^{d-1}\sim$ 常数. 因此 $L\to\infty$ 时 P 将 $\to 1$. 这是熵战胜能量的例子 ($k_B=1$)

简并度给出组合数量熵：$S=\ln\frac{L}{W}$

再：偶数个 domain wall 让 $m(\frac{L}{2})=m_0$，奇数个 domain wall 让 $m(\frac{L}{2})=-m_0$

$$P[n\ \text{walls}]=\frac{e^{-n\beta F_{wall}}}{Z}\frac{1}{W^n}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}dx_1\int_{x_1}^{\frac{L}{2}}dx_2\cdots\int_{x_{n-1}}^{\frac{L}{2}}dx_n=\frac{1}{Z\,n!}\left(\frac{L\,e^{-\beta F_{wall}}}{W}\right)^n$$

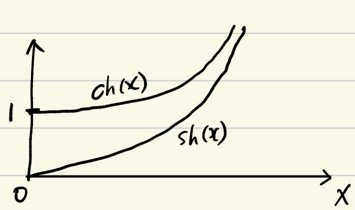
$N=\frac{L}{W}$ 个位置，$\frac{L}{W}\gg n$. 任选 n 个位置，有多少种选法？ $C_N^n=\frac{N!}{n!(N-n)!}\approx\frac{N^n}{n!}$

左 m_0 右 m_0 的几率：

$$P[m_0\to m_0]=\frac{1}{Z}\sum_{n\ \text{even}}\frac{1}{n!}\left(\frac{L\,e^{-\beta F_{wall}}}{W}\right)^n=\frac{1}{Z}\cosh\left(\frac{L\,e^{-\beta F_{wall}}}{W}\right)$$

相反. m_0 左，$-m_0$ 右的几率：

$$P[m_0\to -m_0]=\frac{1}{Z}\sum_{n\ \text{odd}}\frac{1}{n!}\left(\frac{L\,e^{-\beta F_{wall}}}{W}\right)^n=\frac{1}{Z}\sinh\left(\frac{L\,e^{-\beta F_{wall}}}{W}\right)$$



随着 $L\to\infty$，$P[m_0\to m_0]=p[m_0\to -m_0]$ 左边忘记了右边的边界.

$\Rightarrow \langle m\rangle=0$.

☆ 离散对称性的 L-G 理论，其下临界维数为 $d_l=1$.

机制：domain wall 大量出现，破坏有序. 称为 domain wall 的 proliferate.