第九讲

第二章 路径积分的高斯近似

本章我们开始处理路径积分

$$Z = \int \mathcal{D}m(x) e^{-\beta F[m(\vec{x})]} \quad ①$$

策略：对 saddle point 主导的位型引入其它路径带来的修正，也称高斯近似

或者说 其它路径给出了围绕平衡位型的热涨落，不过 这一方法 在临界点是失效的。

以下 我们将 $m(\vec{x})$ 写成 $\phi(\vec{x})$。（因为与量子场论的关系，M 在量子场论中是质量。）

先考虑 $B=0$.

$$F[\phi(\vec{x})] = \int d^d\vec{x} \left[\frac{1}{2}\alpha_2(T)\phi^2 + \frac{1}{4}\alpha_4(T)\phi^4 + \frac{1}{2}\gamma(T)(\nabla\phi)^2 + \cdots \right] \quad ②$$

如果 $F[\phi(x)]$ 是 ϕ 的二次型 (quadratic)，路径积分是平庸的 (trivial)

如果 F 中有 ϕ 的高阶项，但高阶项只给出小的修正的话，也可以处理.

一旦高阶项很重要 没有数值方法是不行的.

本节只讨论 $F[\phi(x)]$ 包含 不高于 $\phi(\vec{x})$ 二次项

- $T>T_c$，可直接扔掉所有高阶项

$$F[\phi(\vec{x})] = \frac{1}{2}\int d^d\vec{x} \left(\gamma \nabla\phi \cdot \nabla\phi + \mu^2\phi^2 \right) \quad ③$$

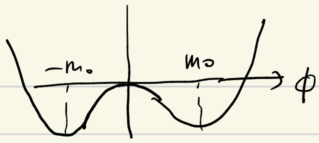
这里我们定义了 $\mu^2 = \alpha_2(T) > 0$.

扔掉 4 次项很自然：$T>T_c$，$\phi(x)$ 在 $m_0=0$ 附近涨落，应该很小，高阶更小.

但 4 次项在 $\mu^2 \to 0$ 时，越来越重要.（只能让位给 ϕ^4 项，因为 $\mu^2\phi^2$ 快没了）

因此 下面要做的事有不可靠，但可以提供一些直觉 为下一章重正化分析作好准备

• $T<T_c$, $\alpha_2(T)<0$.



saddle point 不在 $\phi(x)=0$ 处，而在 $\langle\phi\rangle=\pm m_0$ （$\langle\phi\rangle$ 就是之前定义的 $\langle m\rangle$），有必要作偏移项.

设围绕 m_0 的涨落为

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x)-\langle\phi\rangle \quad \text{or} \quad \phi(x)=\langle\phi\rangle+\tilde{\phi}(x)$$

$$\Rightarrow \quad F[\phi(x)] = F[m_0] + \frac{1}{2}\int d^dx\left[\alpha_2'(T)\tilde{\phi}^2 + \gamma(T)(\nabla\tilde{\phi})^2+\cdots\right] \quad ④$$

其中：$\alpha_2' = \alpha_2(T)+3m_0^2\alpha_4(T) = -2\alpha_2(T) > 0$

推导：$(m_0+\tilde{\phi})^2 = m_0^2+2m_0\tilde{\phi}+\tilde{\phi}^2$, $(m_0+\tilde{\phi})^4 = m_0^4+4m_0^3\tilde{\phi}+6m_0^2\tilde{\phi}^2+4m_0\tilde{\phi}^3+\tilde{\phi}^4$.

$\tilde{\phi}$ 零阶：$m_0^2=-\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$, $\alpha_2 m_0^2 = -\frac{\alpha_2^2}{\alpha_4}$, $\alpha_4 m_0^4 = +\frac{\alpha_2^2}{\alpha_4}$, $\Rightarrow \frac{1}{2}\alpha_2 m_0^2+\frac{1}{4}\alpha_4 m_0^4 = -\frac{\alpha_2^2}{4\alpha_4} \to F[m_0]$

$\tilde{\phi}$ 一阶：$\frac{2\alpha_2 m_0\tilde{\phi}}{2}+\frac{4\alpha_4}{4}\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\right)m_0\tilde{\phi}=0$

$\tilde{\phi}^2$ 的系数：$\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{1}{4}\alpha_4\cdot 6m_0^2 = \frac{1}{2}(\alpha_2+3m_0^2\alpha_4) = \frac{1}{2}(-2\alpha_2)$

同时：$\nabla\phi=\nabla\tilde{\phi}$.

• ④的形式与③一样，可把对③的讨论结果搬过来. μ^2 从 α_2 变成 α_2'

§2.1 热力学自由能 F_{thermo} 的计算

$F_{thermo} = -T\ln Z$，$F[m(x)]$ 中我们去掉了 $F_0(T)$，

F_{thermo} 中应该包含 $F_0(T)$，在 $T<T_c$ 时，F 中还包括 $F[m_0]$

此外，我们来计算 F_{thermo} 中来自 $\phi(\vec{x})$ 围绕 m_0 涨落的贡献

设 $B=0$，计算③时：对于二次型自由能，只需在傅立叶空间计算. 作如下变换.

$$\boxed{\phi_{\vec{k}} = \int d^dx\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\phi(\vec{x})}$$

由于 $\phi(\vec{x})$ real $\Rightarrow \phi_{\vec{k}} = \phi^*_{-\vec{k}}$

$\vec{k}$ 是波矢，按量子力学习惯，也称其为动量.

注意 • 虽然 $\phi(\vec{x})$ 是连续场，但来自对 lattice model 的粗粒化. $\therefore$ 有个分辨率 $ba \leftarrow$ Box间距

对应最大波矢 $\Lambda=\frac{2\pi}{ba}$

• 波长小于 ba，或 $|\vec{k}|>\Lambda$ 的 mode 没有. Λ 称为 紫外截断 (ultra-violet cut-off)

逆变换：$\phi_{\vec{k}} \to \phi(\vec{x})$. 两个形式：

1. 设系统大小有限 $V = L^d$.

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi_{\vec{k}},}$$

$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}\vec{n}$, $n \in \mathbb{Z}^d$. [保证周期性边界 $\phi(x+L) = \phi(x)$]

由于 $|k|$ 最大 $= \Lambda \Rightarrow k$ 的数目 $= \left(\frac{\Lambda}{\frac{2\pi}{L}}\right)^d = \left(\frac{L}{ba}\right)^d =$ box 数目

2. 在 $V \to \infty$ 时，求和变成积分。

$(\Delta k)^d$ 内 $\vec{k}$ 的数目 $= \frac{(\Delta k)^d}{(\frac{2\pi}{L})^d} = V \cdot \frac{d^d k}{(2\pi)^d}$

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi_{\vec{k}}}$$

改写 $F[\phi(\vec{x})] \to F[\phi_{\vec{k}}]$:

$$\nabla e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = i\vec{k}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$F[\phi_{\vec{k}}] = \frac{1}{2}\int \frac{d^d \vec{k}_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d \vec{k}_2}{(2\pi)^d} \int d^d x\, (-\gamma \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 + \mu^2)\, \phi_{\vec{k}_1} \phi_{\vec{k}_2}\, e^{i(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\cdot\vec{x}}$$

利用 $\int d^d x\, e^{i(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\cdot\vec{x}} = (2\pi)^d \delta^d(\vec{k}_1+\vec{k}_2)$

$$\boxed{F[\phi_{\vec{k}}] = \frac{1}{2}\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (\gamma k^2 + \mu^2) |\phi_k|^2}$$

自由能分解成各个 $\phi_{\vec{k}}$ mode 的求和

数学上看 这是由于 e^{ikx} 是 $-\gamma\nabla^2 + \mu^2$ 的本征矢

类似 $\int \psi^* \hat{A} \psi\, dx = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \sum_k a_k |\phi_k|^2$

下面需要计算自由能（泛函积分，functional integral）

$$Z = \int \mathcal{D}\phi(x)\, e^{-\beta F[\phi(x)]}$$

我们需要变换测度 $\mathcal{D}\phi(x) \to \mathcal{D}\phi_k$

$$\int \mathcal{D}\phi(x) = \prod_{box} \int d\phi(x_i)$$

- $\int \mathcal{D}\phi(x) = \prod_{\vec{k}}' [N \int d\phi_{\vec{k}}\, d\phi_{-\vec{k}}] = \prod_{\vec{k}}' [N \int d\mathrm{Re}\phi_{\vec{k}}\, d\mathrm{Im}\phi_{\vec{k}}]$,

$\prod_{k}'$ 表示对 $k_x > 0$ 的 $\vec{k}$ 连乘

$d\phi_{\vec{k}}\, d\phi_{-\vec{k}}$ 是对 $d(\mathrm{Re}\phi_{\vec{k}})\, d(\mathrm{Im}\phi_{\vec{k}})$ 的简写.

(半个 $\vec{k}$ 空间，否则 $\mathrm{Re}\phi_k, \mathrm{Im}\phi_k$ 会被积两遍)

注意 $\phi_{-\vec{k}} = \phi_{\vec{k}}^*$, $\vec{k}$ 的数目 $=$ box 数目，每 $\vec{k}$ 有两个实变量，$k_x > 0$ 限制之变量数相等

N 要严格说要计算稍麻烦，由于傅立叶变换是线性的，因此 N 是常数，具体数值不重要

$$\int d\phi_{\vec{k}}\int d\phi_{-\vec{k}}\ e^{-\frac{1}{2\sigma}|\phi_{\vec{k}}|^2} \equiv \int d(\mathrm{Re}\,\phi_{\vec{k}})\cdot\int d(\mathrm{Im}\,\phi_{\vec{k}})\ e^{-\frac{1}{2\sigma}(\mathrm{Im}\,\phi_{\vec{k}})^2-\frac{1}{2\sigma}(\mathrm{Re}\,\phi_{\vec{k}})^2} = (\sqrt{2\pi\sigma})^2$$

这样:

$$Z = \prod_{\vec{k}}{}'\left[N\int d\phi_{\vec{k}}\, d\phi_{-\vec{k}}\right] e^{-\frac{\beta}{2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}(\gamma k^2+\mu^2)|\phi_k|^2}$$

$$\overset{\text{离}}{=} \prod_{\vec{k}}{}'\left[N\int d\phi_{\vec{k}}\, d\phi_{-\vec{k}}\right] e^{-\frac{\beta}{2V}\sum_{k}(\gamma k^2+\mu^2)|\phi_k|^2} = \prod_{\vec{k}}{}'\left[N\int d\phi_{\vec{k}}\, d\phi_{-\vec{k}}\right]\prod_{\vec{k}}{}' e^{-\frac{\beta}{V}(\gamma k^2+\mu^2)|\phi_{\vec{k}}|^2}$$

$$= \prod_{\vec{k}}{}'\left[N\int d\phi_{\vec{k}}\, d\phi_{-\vec{k}}\ e^{-\frac{2\beta}{2V}(\gamma k^2+\mu^2)|\phi_k|^2}\right] = \prod_{\vec{k}}{}'\ \frac{\pi VTN}{(\gamma k^2+\mu^2)}$$

$$= \prod_{\vec{k}}\sqrt{\frac{\pi TVN}{\gamma k^2+\mu^2}}$$

以上用到高斯积分 $\int_{-\infty}^{\infty}dx\ e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} = \sqrt{2\pi\sigma}$

现在我们就得到了包含涨落的自由能.(thermo)

$$\frac{F_{th}}{V} = -\frac{T}{V}\log Z = -\frac{T}{2V}\sum_{k}\log\frac{\pi TVN}{\gamma k^2+\mu^2}$$

$$\overset{V\to\infty}{=} -\frac{T}{2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\log\left(\frac{\pi TVN}{\gamma k^2+\mu^2}\right)$$

$$\frac{1}{V}\log Z = \frac{1}{2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\log\left(\frac{\pi TVN}{\gamma k^2+\mu^2}\right)$$

§2.1.1. 热容.（或比热 $c = C/V$）

计算其随温度的变化. $\langle E\rangle = \frac{\sum E e^{-\beta E}}{Z} = \frac{-\partial}{\partial\beta}\ln Z$. $cV = \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T} = \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial T} = \beta^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\log Z$

$$c = \frac{\beta^2}{V}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\log Z. = \frac{1}{2}\left(T^2\frac{\partial^2}{\partial T^2} + 2T\frac{\partial}{\partial T}\right)\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\log\left(\frac{\pi TVN}{\gamma k^2+\mu^2}\right)$$

$$\beta^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} = \frac{1}{T^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\partial T}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial T}\right] = \frac{1}{T^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[-T^2\frac{\partial}{\partial T}\right] = \frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial T}\left[-T^2\frac{\partial}{\partial T}\right] = \left[+2T\frac{\partial}{\partial T} + T^2\frac{\partial^2}{\partial T^2}\right]$$

$\frac{\partial}{\partial T}$ 作用到 T、$\mu^2(T)$ 上，设 γ 是常数

考虑 $T > T_c$ $\mu^2 = T - T_c$. $\log\frac{\pi TVN}{\gamma k^2+\mu^2} = \log\pi VN + \log T - \log(\gamma k^2+\mu^2)$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\left[1 - \frac{2T}{\gamma k^2+\mu^2} + \frac{T^2}{(\gamma k^2+\mu^2)^2}\right]$$

物理意义：

第一项：能均分，每个自由度 $\to \frac{1}{2}k_BT \to$ $c/$自由度 $= \frac{1}{2}(k_B)$. $\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d} = \frac{1}{V}\sum_k = \frac{1}{(ba)^d} = \Lambda^d$

另两项来自 $F[\phi(x)]$ 里系数的温度依赖，并与空间维度 d 有关 （$\mu = 0$，$(T-T_c)$ 时消失）

中间一项对于 $I = \int_0^\Lambda dk\frac{k^{d-1}}{\gamma k^2+\mu^2}$

对于 $d \geq 2$，$\Lambda = \frac{2\pi}{ba} \to \infty$ 的话，I 会 $\to \infty$，我们需要截断 Λ，否则结果非物理.

$$I \sim \int_0^\infty dk\ k^{d-3} = \begin{cases} k^{d-2} & \text{if } d>2 \\ \ln k & \text{if } d=2. \end{cases}$$

相反当 $d=1$，在 $\Lambda\to\infty$ 时 I 有限.

如果 I 有限，我们可以利用重标技术 (rescaling variables) 判定其温度依赖关系.

- $I = \int_0^\Lambda dk \frac{k^{d-1}}{\gamma k^2 + u^2} = \left[\int_0^1 \frac{d(k/\Lambda)\ (\frac{k}{\Lambda})^{d-1}}{[\gamma(\frac{k}{\Lambda})^2 + \frac{u^2}{\Lambda^2}]}\right] \cdot \Lambda^{d-2} \sim \begin{cases} \Lambda^{d-2} & \text{for } d>2 \\ \ln\Lambda & \text{for } d=2 \end{cases}$ 与 $T-T_c$ 无关

$d=2$. $\int_0^\Lambda dk \frac{k}{\gamma k^2+u^2} = \int_0^1 d\frac{k}{\Lambda} \frac{k/\Lambda}{\gamma(\frac{k}{\Lambda})^2 + \frac{u^2}{\Lambda^2}}$，积分公式: $\int \frac{x\,dx}{ax^2+c} = \frac{1}{2a}\ln(ax^2+c)$

- $I = \int_0^{\Lambda/u} \left(\frac{dk}{u}\right) \frac{1}{(\gamma\frac{k^2}{u^2}+1)} \cdot \frac{u}{u^2} \sim \frac{1}{u}$. for $d=1$ $\sim (T-T_c)^{-\frac{1}{2}}$ 但处于下临界维数

- 类似地，最后一项:

$$\int_0^\Lambda dk \frac{k^{d-1}}{(\gamma k^2+u^2)^2} \sim \begin{cases} \Lambda^{d-4} & \text{when } d\geq 4 \\ u^{d-4} & \text{when } d<4 \end{cases}$$

(在 $d=4$ 时，有个对数 $\ln\Lambda$) 与 $T-T_c$ 无关

与 $T-T_c$ 相关

我们发现:

1. $d\geq4$，对比热的领头贡献 包含与 T 无关的常数 Λ^d，在 T_c 两端都有，来自能均分.

   比热 还包含了比于 T 与 T^2 的项.

2. 相反，$d<4$ 时. 对比热领头的贡献 正比于 u^{d-4} (在 $T\to T_c$ 时趋于 ∞)

   此时: $C\sim |T-T_c|^{\frac{-4+d}{2}}$ 即 $\alpha = 2-\frac{d}{2}$

   这一结果 与 MFT $\alpha=0$ 不同

- 虽然这一结果并不正确，但是，我们看到路径积分可以改变平均场的结果!

  it gives a hint for why the critical exponents are not affected when $d\geq4$.

- 提示我们为什么在 $d\geq4$ 的时候，临界指数会回到平均场.